Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, Vol. 66 (1982)

Osservazione sulla risolubilità del problema di Dirichlet per una classe di equazioni ellittiche a coefficienti discontinui.

Maurizio Chicco (*)

Summary - I prove the solvability of the Dirichlet problem for a previously considered class of linear second order elliptic equations with discontinuous coefficients, under less stringent hypotheses.

1. Introduzione.

Si considera, in un sottoinsieme aperto limitato Ω di R^n, un operatore lineare uniformemente ellittico del tipo

$$(1) \qquad L = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + c\,.$$

I coefficienti a_{ij} appartengono ad $L_\infty(\Omega)$ e soddisfano alla successiva condizione (3): tale condizione, introdotta in [1], è verificata ad esempio se tali coefficienti appartengono a $C^0(\bar{\Omega})$, oppure a $H^{1,n}(\Omega)$, oppure se soddisfano ad un'ipotesi « di tipo Cordes », cioè

$$\operatorname*{ess\,inf}_{\Omega} \Big(\sum_{i=1}^{n} a_{ii}\Big)^2 \Big(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2\Big)^{-1} > n-1\,.$$

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico, Via Alberti 4 - 16132 Genova.
Lavoro eseguito nell'ambito dell'Istituto per la Matematica Applicata del C.N.R., Via L. B. Alberti 4 - 16132 Genova.

Il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} Lu + \lambda u = f & \text{q.o. in } \Omega\,, \\ u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)\,, \end{cases} \tag{2}$$

ammette una e una sola soluzione u, per ogni scelta di f in $L_2(\Omega)$, non appena il numero reale λ è abbastanza grande: ciò è stato provato in [1]. Inoltre in [7] è stato dimostrato che il problema (2) ammette una ed una sola soluzione, qualunque sia il numero reale λ, purchè l'insieme Ω sia convesso e di misura abbastanza piccola. Scopo della presente nota è provare l'esistenza e l'unicità della soluzione del problema (2) nell'ipotesi che $\operatorname*{ess\,inf}_{\Omega} c > 0$ e $\lambda \geqslant 0$, senza limitazioni sull'insieme Ω (salvo il fatto di avere la frontiera sufficientemente regolare).

2. Notazioni ed ipotesi.

Sia Ω un sottoinsieme aperto limitato di R^n ($n \geqslant 3$) dotato di frontiera $\partial\Omega$ rappresentabile localmente come grafico di una funzione di classe C^2. Siano $a_{ij} \in L_\infty(\Omega)$, $a_{ij} = a_{ji}$ q.o. in Ω, $b_i \in L_n(\Omega)$ ($i, j = 1, 2, \ldots, n$), $c \in L_p(\Omega)$ con $p = 2$ per $n = 3$, $p > 2$ per $n = 4$, $p = n/2$ per $n \geqslant 5$.

Sia A la classe delle matrici quadrate così definita:

$$A = \Big\{ ((\alpha_{ij})) \colon \alpha_{ij} \in H^{1,n}(\Omega) \cap L_\infty(\Omega),\ \alpha_{ij} = \alpha_{ji} \text{ q.o. in } \Omega \ (i, j = 1, 2, \ldots, n), \\ \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} t_i t_j \geqslant |t|^2 \text{ q.o. in } \Omega, \text{ per ogni } t \in R^n \Big\}.$$

Posto

$$G = \{ g \in L_\infty(\Omega) \colon \operatorname*{ess\,inf}_{\Omega} g > 0 \}$$

supponiamo che esistano una matrice $((\alpha_{ij})) \in A$ e una funzione $g \in G$ tali che

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} (\alpha_{ij} - 3g\alpha_{ij})^2 < 1\,. \tag{3}$$

L'ipotesi (3) implica l'uniforme ellitticità dell'operatore L: si veda [4].

3. Risultato.

Teorema. *Oltre alle ipotesi elencate sopra, supponiamo che sia* $\lambda + \operatorname{ess\,inf}_{\Omega} c > 0$. *Allora il problema di Dirichlet* (2) *ammette una ed una sola soluzione, qualunque sia* $f \in L_2(\Omega)$.

Dimostrazione. Supponiamo provvisoriamente che f, b_i, c appartengano ad $L_\infty(\Omega)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Per i risultati di [1] esistono un numero reale λ^0 e una costante K (dipendenti dai coefficienti di L, da n e da Ω), tali che

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq K \|Lu + \lambda^0 u\|_{L_2(\Omega)} \tag{4}$$

per ogni $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Consideriamo la successione di funzioni $a_{ij}^{(m)} \in C^\infty(\bar{\Omega})$ $(m = 1, 2, \ldots)$ definita nel modo seguente (vedi [1]). Siano $g \in G$, $\alpha_{ij} \in A$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ funzioni soddisfacenti alla (3); è possibile prolungare la definizione delle funzioni α_{ij} a tutto R^n in modo che appartengano ad $H^{1,n}(R^n) \cap L_\infty(R^n)$ (indichiamo per semplicità colle stesse lettere le funzioni così prolungate). Poniamo poi

$$q_{ij} = \begin{cases} g a_{ij} & \text{in } \Omega , \\ \alpha_{ij} & \text{in } R^n \setminus \Omega , \qquad (i, j = 1, 2 \quad \ldots, n) , \end{cases}$$

e sia θ una funzione tale che $\theta \in C_0^\infty(R^n)$, $\theta(x) = 0$ per $|x| \geq 1$, $\int_{R^n} \theta(x)\, dx = 1$. Per ogni numero naturale m e per ogni $x \in R^n$ sia

$$a_{ij}^{(m)}(x) = m^n \int_{R^n} \theta(mx - my) q_{ij}(y)\, dy \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n) .$$

Consideriamo le soluzioni u_m dei problemi di Dirichlet

$$\begin{cases} L_m u_m + \lambda u_m = f & \text{q.o. in } \Omega , \\ u_m \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) & (m = 1, 2, \ldots) , \end{cases} \tag{5}$$

essendo L_m l'operatore definito da

$$L_m = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{(m)} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + c .$$

Le soluzioni dei problemi (5) esistono e sono uniche per risultati noti, essendo i coefficienti $a_{ij}^{(m)}$ di classe $C^\infty(\bar{\Omega})$. Posto $c_0 = \lambda + \inf\operatorname{ess}_{\Omega} c$ (positivo per ipotesi), risulta

$$\|u_m\|_{L_\infty(\Omega)} \leqslant c_0^{-1}\|f\|_{L_\infty(\Omega)} \qquad (m = 1, 2, \ldots) \tag{6}$$

(vedi ad esempio [6] teorema 4.1, [5] lemma 1.1). Per i risultati di [1] la maggiorazione (4) è valida anche per gli operatori L_m $(m = 1, 2, \ldots)$ e le costanti K, λ^0 non dipendono da m. Pertanto dalle (4), (6) segue

$$\begin{aligned} \|u_m\|_{H^2(\Omega)} &\leqslant K\|f + (\lambda^0 - \lambda)\, u_m\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \\ &\leqslant K(\operatorname{mis}\Omega)^{\frac{1}{2}}(1 + |\lambda^0 - \lambda|/c_0)\|f\|_{L_\infty(\Omega)}\,. \end{aligned} \tag{7}$$

Per la (7) un'estratta dalla successione $\{u_m\}_{m\in N}$ converge debolmente ad una funzione u la quale, tenendo conto delle (5), è soluzione del problema (2); risulta inoltre evidentemente

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leqslant K(\operatorname{mis}\Omega)^{\frac{1}{2}}(1 + |\lambda^0 - \lambda|/c_0)\,\|f\|_{L_\infty(\Omega)}\,.$$

Ciò prova che esiste (almeno) una soluzione u del problema (2) se, come si è supposto, $f \in L_\infty(\Omega)$. Sia G l'operatore inverso di $L + \lambda^0 I$; G è un operatore lineare e limitato da $L_2(\Omega)$ sopra $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ e quindi compatto da $L_2(\Omega)$ in sè. Il problema (2) si può riscrivere, se $\lambda \neq \lambda^0$ (ciò non è restrittivo):

$$Gu - (\lambda - \lambda^0)^{-1} u = (\lambda - \lambda^0)^{-1} Gf\,. \tag{8}$$

Per quanto già osservato, il problema (2) (e quindi la (8)) ha (almeno) una soluzione $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ non appena $f \in L_\infty(\Omega)$. Lo spazio $G(L_\infty(\Omega))$ è denso in $L_2(\Omega)$, come si può facilmente verificare, quindi per il teorema dell'alternativa il nucleo dell'operatore $[G - (\lambda - \lambda^0)^{-1}I]^*$ (aggiunto di $G - (\lambda - \lambda^0)^{-1}I$) si riduce allo zero di $L_2(\Omega)$. Ancora per il teorema dell'alternativa l'equazione (8) (e quindi pure il problema (2)) ha una ed una sola soluzione u per ogni scelta di f in $L_2(\Omega)$.

Occorre ora togliere l'ipotesi provvisoria che b_i, $c \in L_\infty(\Omega)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$; ciò si fa approssimando opportunamente l'operatore L con operatori aventi i coefficienti in $L_\infty(\Omega)$. Per brevità si rimanda a [2], teorema 12. $\square$

COROLLARIO. *Se si suppone*

$$\operatorname*{ess\,inf}_{\Omega} b_i > -\infty \qquad \textit{oppure} \qquad \operatorname*{ess\,sup}_{\Omega} b_i < +\infty$$

per almeno un valore di i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, *e se* $\lambda + \operatorname*{ess\,inf}_{\Omega} c \geqslant 0$, *il problema* (2) *ammette ancora una ed una sola soluzione per ogni scelta di* f *in* $L_2(\Omega)$.

DIMOSTRAZIONE. È la stessa di [2], corollario 13. □

BIBLIOGRAFIA

[1] M. CHICCO, *Dirichlet problem for a class of linear second order elliptic partial differential equations with discontinuous coefficients*, Ann. Mat. Pura Appl., (4), **92** (1972), pp. 13-23.

[2] M. CHICCO, *Principio di massimo per soluzioni di equazioni ellittiche di tipo Cordes*, Ann. Mat. Pura Appl., (4), **100** (1974), pp. 239-258.

[3] M. CHICCO, *Terzo problema al contorno per una classe di equazioni ellittiche del secondo ordine a coefficienti discontinui*, Ann. Mat. Pura Appl., (4), **112** (1977), pp. 241-259.

[4] N. CHICCO, *Su una classe di equazioni ellittiche lineari del secondo ordine a coefficienti discontinui*, Seminario dell'Istituto di Matematica di Genova, no. 9 (1978).

[5] P. L. LIONS, *Problèmes elliptiques du 2-ème ordre non sous forme divergence*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, **84** A (1979), pp. 263-271.

[6] C. MIRANDA, *Alcune osservazioni sulla maggiorazione in L^ν delle soluzioni deboli delle equazioni ellittiche del secondo ordine*, Ann. Mat. Pura Appl., (4), **61** (1963), pp. 151-169.

[7] M. VENTURINO, *Problema di Dirichlet per un'equazione ellittica a coefficienti discontinui in un aperto di misura piccola*, in corso di stampa sul Boll. Un. Mat. Ital.

Manoscritto pervenuto in redazione il 27 febbraio 1981.