CHICCO, MAURIZIO
1968
Boll. U. M. I.
(4), N. 4-5, pp. 620-630

Comportamento all'infinito delle soluzioni di equazioni ellittiche di tipo variazionale.

MAURIZIO CHICCO (Genova) (*)

Summary. - *I prove a Liouville type theorem for solutions of second order elliptic partial differential equations of divergence form with lower order terms.*

Introduzione. - È noto che una funzione armonica in tutto lo spazio e limitata (superiormente od inferiormente) è necessariamente costante. Tale teorema è stato generalizzato alle soluzioni di equazioni ellittiche, di tipo variazionale o no, facendo ipotesi di vario genere sui coefficienti (vedi [1], [2], [3], [4], [5], [7]).

In questo lavoro si considera il problema per una equazione del tipo seguente (variazionale):

$$(1) \qquad \int_{R^n} \left\{ \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i} \varphi_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} \varphi \right\} dx = 0 \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(R^n),$$

ove $u \in H^1_{loc}(R^n)$ e i coefficienti a_{ij} vengono supposti, quanto alla regolarità, soltanto misurabili ed uniformemente limitati. La presenza dei coefficienti b_i comporta la seguente alternativa: se $b_i(x) = 0(|x|^{-\alpha})$ per $|x| \to \infty$ con $\alpha \geq 1$, allora ogni soluzione limitata della equazione (1) è necessariamente costante; se $b_i(x) = 0(|x|^{-\alpha})$ con $\alpha < 1$, tale risultato non è più necessariamente vero (vedi l'osservazione 2).

Il risultato principale del presente lavoro è costituito dal teorema 2; occorre però premettere vari lemmi.

Notazioni ed ipotesi. - Sia Ω un aperto di R^n; con $H^1(\Omega)$ ed $H^1_0(\Omega)$ si indicano rispettivamente i completamenti degli spazi $C^1(\overline{\Omega})$ e $C^1_0(\Omega)$ secondo la norma

$$\| u \|_{H^1(\Omega)} = \| u \|_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \| u_{x_i} \|_{L^2(\Omega)} .$$

Con $H^1_{loc}(\Omega)$ indichiamo lo spazio delle funzioni u definite in Ω tali che $u \in H^1(A)$ qualunque sia l'aperto limitato A contenuto in

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei gruppi di ricerca matematici del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

Ω colla sua chiusura. Nel seguito faremo le seguenti ipotesi, senza esplicita menzione:

esistono due costanti positive M, ν tali che

$$|a_{ij}(x)| \leq M, \quad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) t_i t_j \geq \nu |t|^2 \qquad \text{per ogni } x \in R^n;$$

$b_i \in L^{n}_{\text{loc}}(R^n)$ ed esistono due costanti positive K_1, K_2 tali che, per $i = 1, 2, \ldots, n$, risulti:

$$b_i = b_i' + b_i'', \qquad |b_i'(x)| \leq K_1 |x|^{-1} \, \forall x \in R^n, \qquad \sum_{i=1}^{n} \| b_i'' \|_{L^n(R^n)} \leq K_2.$$

Sia D un aperto contenente un intorno del punto all'infinito:

$$D \supset \{ x:\ x \in R^n,\ |x| > a \} \qquad \text{con } a \geq 0$$

e sia $u \in H^1_{\text{loc}}(D)$ soluzione della equazione

$$\int_D \left\{ \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i} \varphi_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} \varphi \right\} dx = 0 \qquad \forall \varphi \in C_0^{\infty}(D). \tag{1}$$

Indichiamo ancora con $Q(y, \delta)$ il cubo n-dimensionale così definito

$$Q(y, \delta) = \{ x:\ x \in R^n,\ |x_i - y_i| \leq \delta,\ i = 1, 2, \ldots, n \}.$$

Possiamo ora enunciare il seguente

TEOREMA 1. - *Sia $u \in H^1_{\text{loc}}(D)$ una soluzione positiva della* (1). *Sia $x_0 \in R^n$ e posto $d = |x_0| - 4\sqrt{n}$, supponiamo $d > 0$. Allora esistono due costanti positive ρ_0 e H, con H indipendente da ρ, tali che per tutti i $\rho > \rho_0$ risulti*

$$\max_{Q(\rho x_0, \rho)} u \leq H \min_{Q(\rho x_0, 2\rho)} u.$$

Tale teorema verrà dimostrato attraverso vari lemmi seguendo da vicino il procedimento usato da G. STAMPACCHIA in [6] per provare la disuguaglianza di HARNACK. Cominciamo dal

LEMMA 1. - *Sia θ un numero positivo e non maggiore di 2. Allora nelle stesse ipotesi del teorema* 1 *esistono tre costanti positive ρ_1, K_3, β (K_3 e β indipendenti da ρ) tali che per ogni $\rho > \rho_1$ risulti*

$$\left(\frac{1}{\rho^n} \int_{Q(\rho x_0, \theta\rho)} |u|^{\beta} dx \right)^{1/\beta} \leq K_3 \left(\frac{1}{\rho^n} \int_{Q(\rho x_0, \theta\rho)} |u|^{-\beta} dx \right)^{-1/\beta}. \tag{2}$$

DIMOSTRAZIONE (vedi [6], lemmi 8.2 ed 8.3). - Si osserva che la funzione $v = \log u$ soddisfa in D alla equazione

$$-\sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}v_{x_i}\Big)_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i v_{x_i} - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}v_{x_i}v_{x_j} = 0$$

da cui moltiplicando per α^2 con $\alpha \in C_0^1(Q(\rho x_0, 2\theta\rho))$ (supposto $\rho d > a$ in modo che $Q(\rho x_0, 2\theta\rho) \subset D$) si ottiene

$$\int\limits_{Q(\rho x_0,\, 2\theta\rho)} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\alpha^2 v_{x_i}v_{x_j}dx =$$

$$= 2\int\limits_{Q(\rho x_0,\, 2\theta\rho)} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\alpha\alpha_{x_i}v_{x_j}dx + \sum_{i=1}^{n}\int\limits_{Q(\rho x_0,\, 2\theta\rho)} (b_i' + b_i'')\alpha^2 v_{x_i}dx.$$

Sia ora $S(y, r)$ la sfera di centro y e raggio r; supponiamo $r \leq \theta\rho$ (sarà chiaro dal seguito che basta limitarsi a considerare questo caso). Sia poi $\alpha \in C_0^1(S(y, 2r) \cap Q(\rho x_0, 2\theta\rho))$, $\alpha = 1$ in $S(y, r) \cap$ $\cap\, Q(\rho x_0, \theta\rho)$, $|\alpha_x| \leq \dfrac{2}{r}$. Ne segue $\Big($osserviamo che $|b_i'(x)| \leq \dfrac{K_1}{\rho d}$ se $x \in Q(\rho x_0, 2\theta\rho)\Big)$:

$$\nu\int\limits_{Q(\rho x_0,\, 2\theta\rho)} \alpha^2 v_x^2 dx \leq 2M\Big(\int\limits_{Q(\rho x_0,\, 2\theta\rho)} \alpha^2 v_x^2 dx\Big)^{1/2}\Big(\int\limits_{Q(\rho x_0,\, 2\theta\rho)} \alpha_x^2 dx\Big)^{1/2} +$$

$$+\frac{K_1}{d\rho}\Big(\int\limits_{Q(\rho x_0,\, 2\theta\rho)} \alpha^2 dx\Big)^{1/2}\Big(\int\limits_{Q(\rho x_0,\, 2\theta\rho)} \alpha^2 v_x^2 dx\Big)^{1/2} + K_2\Big(\int\limits_{Q(\rho x_0,\, 2\theta\rho)} \alpha^2 v_x^2 dx\Big)^{1/2}\Big(\int\limits_{Q(\rho x_0,\, 2\theta\rho)} \alpha^2 dx\Big)^{\frac{n-2}{2n}}$$

da cui, per la scelta di α:

$$\nu^2\int\limits_{Q(\rho x_0,\, \theta\rho)\cap S(y,r)} v_x^2 dx \leq 36M^2\int\limits_{Q(\rho x_0,\, 2\theta\rho)\cap S(y,2r)} \alpha_x^2 dx + \frac{9K_1^2}{d^2\rho^2}\operatorname{mis}[Q(\rho x_0, 2\theta\rho) \cap S(y, 2r)] +$$

$$+ 9K_2^2 \operatorname{mis}[Q(\rho x_0, 2\theta\rho) \cap S(y, 2r)]^{\frac{n-2}{n}},$$

e infine, con facili calcoli:

$$\int\limits_{Q(\rho x_0,\, \theta\rho)\cap S(y,r)} v_x^2 dx \leq H_1 r^{n-2}$$

ove H_1 dipende da K_1, K_2, d, ν, M, θ, a, n ma non dipende nè da ρ nè da r; non è difficile vedere che tale disuguaglianza vale anche re $r \geq \theta\rho$. Una semplice applicazione della disuguaglianza di SCHWARTZ fornisce

$$\int_{Q(\rho x_0,\, \theta\rho) \cap S(y,\, r)} |v_x|\, dx \leq H_2 r^{n-1}, \qquad H_2 \text{ indipendente da } \rho \text{ e da } r.$$

Ciò significa che v_x appartiene allo spazio « di MORREY » $L_{1,\,1}(Q(\rho x_0,\ \theta\rho))$ con norma (in tale spazio) non maggiore di H_2. Per un recente risultato di TRUDINGER (vedi [8], corollario) ciò basta per concludere che esistono due costanti positive H_3 ed H_4 indipendenti da ρ tali che:

$$\int_{Q(\rho x_0,\, \theta\rho)} e^{H_3|v - v_Q|} dx \leq H_4 \rho^n,$$

da cui in modo standard (vedi ad esempio [6] pag. 241) si trova la (2) c.v.d.

LEMMA 2. - *Siano soddisfatte le ipotesi del teorema* 1. *Allora per ogni* θ, $0 < \theta \leq 4$, *e per ogni* p, $p \neq \frac{1}{2}$, *esistono tre costanti positive* ρ_2, K_4, K_5 (K_4 e K_5 indipendenti da ρ) tali che per ogni $\rho > \rho_2$ e per ogni $\alpha \in C_0^1(Q(\rho x_0,\ \theta\rho))$ risulti, posto $v = u^p$:

$$\left\{ \int_{Q(\rho x_0,\, \theta\rho)} (\alpha v)^{\frac{2n}{n-2}} dx \right\}^{\frac{n-2}{n}} \leq K_4 \int_{Q(\rho x_0,\, \theta\rho)} \alpha_x^2 v^2 dx + \frac{K_5}{\rho^2} \int_{Q(\rho x_0,\, \theta\rho)} \alpha^2 v^2 dx. \tag{3}$$

DIMOSTRAZIONE (vedi [6] lemma 8.1). - Si verifica subito che la funzione $v = u^p$ soddisfa alla equazione

$$-\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_{x_i} \right)_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i v_{x_i} = \left(\frac{1}{p} - 1 \right) \frac{1}{v} \sum_{i,\, j=1}^{n} a_{ij} v_{x_i} v_{x_j}. \tag{4}$$

Moltiplicando per $\alpha^2 v$, ove $\alpha \in C_0^1(Q(\rho x_0,\ \theta\rho))$ e $\rho d \geq a$, si trova:

$$\left(2 - \frac{1}{p}\right) \int_{Q(\rho x_0,\, \theta\rho)} \sum_{i,\, j=1}^{n} a_{ij} \alpha^2 v_{x_i} v_{x_j} dx = -2 \sum_{i,\, j=1}^{n} \int_{Q(\rho x_0,\, \theta\rho)} \alpha_{ij} \alpha \alpha_{x_i} v v_{x_j} dx -$$
$$- \sum_{i=1}^{n} \int_{Q(\rho x_0,\, \theta\rho)} (b_i' + b_i'') \alpha^2 v v_{x_i} dx;$$

$$\nu \left| 2 - \frac{1}{p} \right| \int_{Q(\rho x_0,\, \theta\rho)} \alpha^2 v_x^2 dx \leq 2M \left(\int_{Q(\rho x_0,\, \theta\rho)} \alpha^2 v_x^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{Q(\rho x_0,\, \theta\rho)} \alpha_x^2 v^2 dx \right)^{1/2} +$$

$$+\frac{K_4}{d\rho}\Bigg(\int\limits_{Q(\rho x_0,\,\theta\rho)}\alpha^2 v^2 dx\Bigg)^{1/2}\Bigg(\int\limits_{Q(\rho x_0,\,\theta\rho)}\alpha^2 v_x^2 dx\Bigg)^{1/2}+$$

$$+S\sum_{i=1}^{n}\|b_i''\|_{L^n(Q(\rho x_0,\,\theta\rho))}\Bigg[\Bigg(\int\limits_{Q(\rho x_0,\,\theta\rho)}\alpha_x^2 v^2 dx\Bigg)^{1/2}\Bigg(\int\limits_{Q(\rho x_0,\,\theta\rho)}\alpha^2 v_x^2 dx\Bigg)^{1/2}+\int\limits_{Q(\rho x_0,\,\theta\rho)}\alpha^2 v_x^2 dx\Bigg].$$

Qui S indica la costante della disuguaglianza di SOBOLEV

$$\|w\|_{L^{2^*}(\Omega)}\leq S\,\|w\|_{H_0^1(\Omega)}\qquad \forall w\in H_0^1(\Omega),\qquad 2^*=\frac{2n}{n-2};$$

tale costante dipende solo da n e non da Ω.

Essendo per ipotesi $\sum_{i=1}^{n}\|b_i''\|_{L^n(R^n)}=K_2$, per ogni $\varepsilon>0$ esiste un numero $\rho(\varepsilon)$ tale che per ogni $\rho>\rho(\varepsilon)$ risulti $\sum_{i=1}^{n}\|b_i''\|_{L^n(Q(\rho x_0,\,\theta\rho))}<\varepsilon$.

Pertanto, con una scelta opportuna di ε (in dipendenza da p, ν, S), si trova che per tutti i $\rho>\rho(\varepsilon)$ risulta

$$\nu\left|2-\frac{1}{p}\right|\int\limits_{Q(\rho x_0,\,\theta\rho)}\alpha^2 v_x^2 dx\leq(2M+\varepsilon S)\Bigg(\int\limits_{Q(\rho x_0,\,\theta\rho)}\alpha^2 v_x^2 dx\Bigg)^{1/2}\Bigg(\int\limits_{Q(\rho x_0,\,\theta\rho)}\alpha_x^2 v^2 dx\Bigg)^{1/2}+$$

$$+\frac{K_4}{\rho d}\Bigg(\int\limits_{Q(\rho x_0,\,\theta\rho)}\alpha^2 v^2 dx\Bigg)^{1/2}\Bigg(\int\limits_{Q(\rho x_0,\,\theta\rho)}\alpha^2 v_x^2 dx\Bigg)^{1/2}.$$

Ne segue, con facili calcoli, che per gli stessi valori di ρ si ha:

$$\int\limits_{Q(\rho x_0,\,\theta\rho)}\alpha^2 v_x^2 dx\leq H_5\int\limits_{Q(\rho x_0,\,\theta\rho)}\alpha_x^2 v^2 dx+\frac{H_6}{\rho^2}\int\limits_{Q(\rho x_0,\,\theta\rho)}\alpha^2 v^2 dx \tag{5}$$

ove H_5 ed H_6 dipendono da M, ν, θ, p, S, n, a, d ma non dipendono da ρ. Una semplice applicazione della disuguaglianza di SOBOLEV fa passare dalla (5) alla (3). c.v.d.

COROLLARIO. - *Sia $v\in H^1_{\mathrm{loc}}(D)$ una sottosoluzione locale positiva della* (1), *cioè risulti*

$$\int\limits_D\Bigg\{\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}v_{x_i}\varphi_{x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i v_{x_i}\varphi\Bigg\}dx\leq 0\qquad\forall\varphi\in C_0^1(D),\quad\varphi\geq 0. \tag{6}$$

Sia θ un numero compreso tra 0 *e* 4. *Allora esistono tre costanti positive ρ_3, K_6, K_7 (K_6 e K_7 indipendenti da ρ) tali che, qualunque* *sia la sottosoluzione v, si ha, purchè $\rho \geq \rho_3$:*

(7) $$\left\{ \int_{Q(\rho x_0,\, \theta\rho)} (\alpha v)^{\frac{2n}{n-2}} dx \right\}^{\frac{n-2}{n}} \leq K_6 \int_{Q(\rho x_0,\, \theta\rho)} \alpha_x^2 v^2 dx + \frac{K_7}{\rho^2} \int_{Q(\rho x_0,\, \theta\rho)} \alpha^2 v^2 dx.$$

DIMOSTRAZIONE. - Ponendo $\varphi = \alpha^2 v$ nella (6), con $\alpha \in C_0^1(Q(\rho x_0,\, \theta\rho))$, risulta:

$$\sum_{j,i=1}^{n} \int_{Q(\rho x_0,\, \theta\rho)} a_{ij} \alpha^2 v_{x_i} v_{x_j} dx \leq -2 \sum_{j,i=1}^{n} \int_{Q(\rho x_0,\, \theta\rho)} a_{ij} \alpha \alpha_{x_i} v_{x_j} dx - \sum_{i=1}^{n} \int_{Q(\rho x_0,\, \theta\rho)} b_i v_{x_i} \alpha^2 v dx.$$

Di qui si procede esattamente come nel lemma 2. c.v.d.

LEMMA 3. - *Siano soddisfatte le ipotesi del teorema* 1, *sia* θ *un numero tale che* $0 < \theta \leq 2$. *Allora esistono costanti positive* ρ_4, K_8, K_9 (K_8 *e* K_9 *indipendenti da* ρ) *in modo che per ogni* $\rho > \rho_4$ *risulti:*

(8) $$\max_{Q(\rho x_0,\, \theta\rho)} u \leq K_8 \left(\frac{1}{\rho^n} \int_{Q(\rho x_0,\, 2\theta\rho)} u^q dx \right)^{1/q} \qquad \text{se } q \geq 2$$

(9) $$\min_{Q(\rho x_0,\, \theta\rho)} u \geq K_9 \left(\frac{1}{\rho^n} \int_{Q(\rho x_0,\, 2\theta\rho)} u^q dx \right)^{1/q} \qquad \text{se } q < 0.$$

DIMOSTRAZIONE (vedi [6] lemma 8.4 e teorema 5.1). - Poichè la funzione $v = u^p$ soddisfa alla equazione (4) se $p < 0$ oppure $p \geq 1$, per tali valori di p essa è sottosoluzione in D, cioè per essa vale la (6).

Pertanto per tali valori di p vale la (7) (corollario del lemma 2) purchè $\rho \geq \rho_3$; osserviamo che la (7) vale qualunque sia la sottosoluzione v e quindi le costanti ρ_3, K_6 e K_7 non dipendono da p.

Dalla (7) e dalla disuguaglianza di HÖLDER segue, se $\alpha \in C_0^1(Q(\rho x_0,\, 2\theta\rho))$:

(10) $$\int_{Q(\rho x_0,\, 2\theta\rho)} \alpha^2 v^2 dx \leq [\operatorname{mis}\{x : x \in Q(\rho x_0,\, 2\theta\rho),\ \alpha v \neq 0\}]^{\frac{2}{n}} \cdot$$
$$\cdot \left[K_6 \int_{Q(\rho x_0,\, 2\theta\rho)} \alpha_x^2 v^2 dx + \frac{K_7}{\rho^2} \int_{Q(\rho x_0,\, 2\theta\rho)} \alpha^2 v^2 dx \right].$$

In questa disuguaglianza si è potuto estendere gli integrali al cubo di semispigolo $2\theta\rho$ perchè nelle nostre ipotesi $\theta \leq 2$, mentre nella (7) si supponeva $\theta \leq 4$. A questo punto osserviamo che per ogni costante k la funzione $v_k = \max(v - k, 0)$ è ancora sottosoluzione in D se lo è v. Inoltre scegliamo, per $r < \rho$: $\alpha \in C_0^1(Q(\rho x_0, 2\theta\rho))$, $\alpha \equiv 1$ in $Q(\rho x_0, 2\theta r)$, $|\alpha_x| \leq \dfrac{2}{\rho - r}$. Con questa scelta di α e sostituendo v_k a v, la (10) dà:

$$\int\limits_{A(k,r)} (v - k)^2 dx \leq [\text{mis } A(k, \rho)]^{\frac{2}{n}} \cdot \left[\frac{K_6}{(\rho - r)^2} + \frac{K_7}{\rho^2}\right] \cdot \int\limits_{A(k,\rho)} (v - k)^2 dx$$

ove si è posto: $A(k, t) = \{x : x \in Q(\rho x_0, 2\theta t), v(x) \geq k\}$.

Poichè $|\rho - r| < \rho$, ne segue

$$\int\limits_{A(k,r)} (v - k)^2 dx \leq \frac{H_7}{(\rho - r)^2} [\text{mis } A(k, \rho)]^{\frac{2}{n}} \int\limits_{A(k,\rho)} (v - k)^2 dx$$

ove H_7 non dipende nè da ρ nè da r. Inoltre per $h > k$ si vede facilmente che

$$(h - k)^2 \text{ mis } A(h, r) \leq \int\limits_{A(h,r)} (v - k)^2 dx \leq \int\limits_{A(k,r)} (v - k)^2 dx.$$

A questo punto si procede esattamente come in [6] pag. 222-223 e si conclude che

$$\max_{Q(\rho x_0, \theta\rho)} v \leq H_8 \left\{\frac{1}{\rho^n} \int\limits_{Q(\rho x_0, 2\theta\rho)} v^2 dx\right\}^{1/2}.$$

ove la costante H_8 non dipende da ρ. Ricordando ora che $v = u^p$ e ponendo $q = 2p$ se $p \geq 1$ e $q = -2p$ se $p < 0$ si ricavano la (8) e la (9) (vedi [6] pag. 241-242). c.v.d.

Siamo ora in grado di dare la

Dimostrazione del teorema 1 (vedi [6] pag. 242). Intanto dalle (2) e (9) nelle quali si ponga $\theta = 2$, si trova che esistono costanti β e K_{10}, indipendenti da ρ, ed un numero ρ_5 tale che per $\rho > \rho_5$ risulti:

$$\min_{Q(\rho x_0, 2\rho)} u \geq K_{10} \left(\frac{1}{\rho^n} \int\limits_{Q(\rho x_0, 4\rho)} u^\beta dx\right)^{1/\beta}. \tag{11}$$

Inoltre la (8) per $\theta = 1$ fornisce

$$\max_{Q(\rho x_0, \rho)} u \leq K_8 \left(\frac{1}{\rho^n} \int\limits_{Q(\rho x_0, 2\rho)} u^2 dx\right)^{1/2}$$

la quale è valida per tutti i $\rho > \rho_4$ e la costante K_8 è indipendente da ρ. La tesi del teorema 1 sarà dunque provata non appena si faccia vedere che esistono costanti ρ_6 e K_{11} (quest'ultima indipendente da ρ) tali che se $\rho > \rho_6$ risulti:

$$(12) \qquad \left(\frac{1}{\rho^n}\int_{Q(x_0,\,2\rho)} u^2 dx\right)^{1/2} \leq K_{11}\left(\frac{1}{\rho^n}\int_{Q(\rho x_0,\,4\rho)} u^\beta dx\right)^{1/\beta}.$$

Per dimostrare la (12), posto $\chi = \dfrac{n}{n-2} = \dfrac{2^*}{2}$, supponiamo che $\beta\chi^s \neq 1$ per tutti gli s interi (tale ipotesi non è restrittiva perchè si può sostituire a β un numero un pò più piccolo, col che la (11) vale ancora). Sia poi h un intero tale che $\beta\chi^h \geq 2$. Poniamo ancora $\beta\chi^s = q_s$, $r_s = 2\rho\left(2 - \dfrac{s}{h}\right)$ e scegliamo $\alpha \in C_0^1(Q(\rho x_0, r_s))$, $\alpha \equiv 1$ in $Q(\rho x_0, r_{s+1})$, $|\alpha_x| \leq \dfrac{h}{\rho}$. Applicando il lemma 2 con tale scelta di α, con $\theta = 2$ e con $v = u^{\frac{q_s}{2}}$, si trova che, per $s = 0, 1, 2, \dots, h-1$, esistono costanti $\rho(s)$, $K_4(s)$, $K_5(s)$ tali che per ogni $\rho > \rho(s)$ risulti

$$\left(\int_{Q(\rho x_0,\, r_{s+1})} u^{q_{s+1}} dx\right)^{\frac{1}{\chi}} \leq K_4(s)\int_{Q(\rho x_0,\, r_s)} \alpha_x^2 u^{q_s} dx + \frac{K_5(s)}{\rho^2}\int_{Q(\rho x_0,\, r_s)} u^{q_s} dx \leq$$
$$\leq \frac{K_4(s)h^2 + K_5(s)}{\rho^2}\int_{Q(\rho x_0,\, r_s)} u^{q_s} dx$$

da cui, con facili calcoli:

$$(13) \qquad \left(\frac{1}{\rho^n}\int_{Q(\rho x_0,\, r_{s+1})} u^{q_{s+1}} dx\right)^{\frac{1}{q_{s+1}}} \leq H_9(s)\left(\frac{1}{\rho^n}\int_{Q(x_0,\, r_s)} u^{q_s} dx\right)^{\frac{1}{q_s}}$$

Se si sceglie $\rho > \max\{\rho(s) : s = 1, 2, \dots, h-1\}$ si possono moltiplicare membro a membro le (13) per $s = 1, 2, \dots, h-1$ ottenendo:

$$\left(\frac{1}{\rho^n}\int_{Q(\rho x_0,\, 2\rho)} u^2 dx\right)^{1/2} \leq \left(\frac{1}{\rho^n}\int_{Q(\rho x_0,\, 2\rho)} u^{q_h} dx\right)^{\frac{1}{q_h}} \leq \prod_{s=0}^{h-1} H_9(s) \cdot \left(\frac{1}{\rho^n}\int_{Q(\rho x_0,\, 4\rho)} u^\beta dx\right)^{1/\beta}$$

la quale non è altro che la (12) e vale per ogni $\rho > \max\limits_s \rho(s)$.

Poichè $\rho(s)$ è funzione solo di β (oltre che di s) e β non dipende da ρ, e poichè anche h dipende solo da β, $\max\limits_s \rho(s)$ è un numero certamente finito. Analogamente ogni costante $H_9(s)$ dipende da β

attraverso s ma non dipende da ρ. Pertanto la (12) sussiste, e il teorema 1 è dimostrato. c.v.d.

COROLLARIO DEL TEOREMA 1. – *Sia A un aperto limitato e connesso di R^n tale che $0 \notin \bar{A}$, e sia $\rho A = \left\{ x : x \in R^n, \ \frac{x}{\rho} \in A \right\}$.*

Sia u come nel teorema 1. Allora esiste una costante $H(A)$, dipendente da A e non da ρ, ed un numero $\rho(A)$ tale che per ogni $\rho > \rho(A)$ risulti

$$\max_{\rho A} u \leq H(A) \min_{\rho A} u.$$

DIMOSTRAZIONE. – Sia ρ_0 un numero tanto grande che sia possibile ricoprire $\rho_0 A$ con un numero finito m di cubi del tipo $Q(x_i, 1)$ ove $|x_i| > 4\sqrt{n}$ per $i = 1, 2, \ldots, m$. Risulta allora

$$\rho\rho_0 A \subset \bigcup_{i=1}^{m} Q(\rho x_i, \rho).$$

Se ρ è abbastanza grande si può applicare il teorema 1, iterandolo al massimo m volte, che dà:

$$\max_{\rho\rho_0 A} u \leq \max_{1\leq i\leq m} \{ \max_{Q(\rho x_i, \rho)} u \} \leq H^m \min_{1\leq i\leq m} \{ \min_{Q(\rho x_i, 2\rho)} u \} \leq H^m \min_{\rho\rho_0 A} u$$

da cui facilmente la tesi. c.v.d.

TEOREMA 2. – *Sia $u \in H^1_{\mathrm{loc}}(D)$ una soluzione dell'equazione* (1). *Allora se u è inferiormente* (*o superiormente*) *limitata in D, esiste il limite di $u(x)$ per $|x|$ che tende all'infinito.*

DIMOSTRAZIONE. – Essa segue dal corollario precedente come in [1] o [5]; riporto la dimostrazione per completezza.

Sia $L = \min\lim_{|x|\to+\infty} u(x)$. Se $L = +\infty$ non c'è nulla da dimostrare; siccome $L > -\infty$ per ipotesi, sia L finito. Fissato ad arbitrio $\varepsilon > 0$, consideriamo la funzione $w = u - L + \varepsilon$. Esiste un numero $\eta > 0$ tale che $w(x) > 0$ per $|x| > \eta$; inoltre esiste una successione $\{x_m\}$ di punti di D tale che $|x_1| \geq \eta$, $|x_m| \nearrow +\infty$, $|w(x_m)| \leq 2\varepsilon$.

Prendiamo ora come insieme A nel corollario precedente ad esempio la corona sferica $\{x : 1 < |x| < 2\} = C$. Siano ρ_m numeri tali che $x_m \in \rho_m C$. Dal corollario precedente segue che esiste un intero m_0 tale che per ogni $m \geq m_0$ sia

$$\max_{\rho_m C} w \leq H(C) \min_{\rho_m C} w \leq 2H(C)\varepsilon.$$

Per il principio di massimo (vedi [6] corollario 8.2) è anche $\max\limits_{|x|\geq|x_{m_0}|} w(x) \leq 2H(C)\varepsilon$, da cui $|w(x)-w(y)| = |u(x)-u(y)| \leq 4H(C)\varepsilon$ per ogni coppia x, y con $|x|, |y| \geq |x_{m_0}|$. Data l'arbitrarietà di ε ciò prova che esiste il limite di $u(x)$ per $|x|$ che tende all'infinito, e cioè la tesi. c.v.d.

COROLLARIO 1. - *Sia $u \in H^1_{\text{loc}}(R^n)$ soluzione della* (1) *in tutto R^n. Allora se u è superiormente* (*o inferiormente*) *limitata, u è identicamente costante.*

DIMOSTRAZIONE. - Dal teorema 2 e dal principio di massimo ([6], corollario 8.2) segue subito che $u \equiv \lim\limits_{|x|\to+\infty} u(x)$. c.v.d.

COROLLARIO 2. - *Sia $u \in H^1_{\text{loc}}(D)$ soluzione della equazione* (1). *Allora o u tende ad un limite* (*finito od infinito*) *per $|x|$ che tende all'infinito, oppure esistono due costanti positive B e γ tali che per ogni r abbastanza grande risulti*

$$\max_{|x|=r} u(x) \geq Br^{\gamma}, \qquad \min_{|x|=r} u(x) \leq -Br^{\gamma}.$$

DIMOSTRAZIONE. - Coincide con quella di [7] utilizzando il teorema 2.

OSSERVAZIONE 1. - Se $b_i \equiv 0$, SERRIN in [5] ha dimostrato che il limite di $u(x)$ per $|x|$ che tende all'infinito nel teorema 2 è necessariamente finito. Non so se ciò sia ancora vero nelle nostre ipotesi.

OSSERVAZIONE 2. - Se $|b_i(x)| \geq K|x|^{-\alpha}$ con $\alpha < 1$ per $|x|$ abbastanza grande, il corollario 1 e quindi anche il teorema 1 non sono più necessariamente veri. Ciò si vede col seguente esempio. Sia $0 < \alpha < 1$; consideriamo l'equazione

$$\Delta u + \frac{\operatorname{sign} x_1}{1+|x_1|^{\alpha}} \frac{\partial u}{\partial x_1} = 0.$$

Essa ammette la soluzione (dipendente dalla sola x_1):

$$u(x) = u(x_1) = c_1 + c_2 \int_0^{x_1} e^{-\int_0^{|y|} \frac{dt}{1+t^{\alpha}}} dy.$$

Si verifica facilmente che questa funzione è limitata in tutto R^n ma non è costante; pertanto in questo caso il corollario 1 non vale.

BIBLIOGRAFIA

[1] D. GILBARG, J. SERRIN, *On isolated singularities of solutions of second order elliptic differential equations*, Journal d'Analyse Mathematique, vol. 4 (1954-56) pag. 309-340.

[2] N. MEYERS, J. SERRIN, *The exterior Dirichlet problem for second order elliptic partial differential equations*, Journal of Mathematics and Mechanics, vol. 9 (1960), pag. 513-538.

[3] J. MOSER, *On Harnack's theorem for elliptic differential equations*, Communications on Pure and Applied Mathematics, vol. 14 (1961), pag. 577-591.

[4] S. N. KRUŽKOV, *Certain properties of solutions to elliptic equations* (English translation), Soviet Mathematics (Doklady), vol. 4 (1963), pag. 686-695.

[5] J. SERRIN, *Singularities of solutions of nonlinear equations*, Non linear Differential Equations (Proceedings of Symposia on Pure Mathematics vol. 17), pag. 68-88, A.M.S. Providence, R.I., 1965.

[6] G. STAMPACCHIA, *Le probleme de Dirichlet pour les èquations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus*, Annales Institut Fourier, tome 15 (1965), pag. 189-258.

[7] J. SERRIN, H. F. WEINBERGER, *Isolated singularities of solutions of linear elliptic equations*, American Journal of Mathematics, vol. 88 (1966), pag. 258-272.

[8] N. S. TRUDINGER, *On imbeddings into Orclicz spacés and some applications*, Journal of Mathematics and Mechanics, vol. 17 (1967), pag. 473-483.

Pervenuta alla Segreteria dell' U.M.I.
il 28 giugno 1968