Bollettino U. M. I.
(4) 4 (1971), 668-676

Confronto tra due modi di definire le disuguaglianze per le funzioni di $H^{1,p}(\Omega)$.

MAURIZIO CHICCO (Genova) (*)

Summary. – *I prove that inequalities in the sense of $H^{1,p}(\Omega)$, for functions of this space, are equivalent to inequalities in the sense of capacity with respect to Ω.*

1. – Introduzione.

È ben noto che le funzioni di $H^{1,p}(\Omega)$ si possono « precisare » in Ω a meno di insiemi di capacità nulla (vedi [3]). In molte circostanze tuttavia sorge il problema di precisare tali funzioni anche sulla frontiera di Ω (vedi [7]). Per tale problema conviene introdurre, piuttosto che la ordinaria capacità della teoria del potenziale, la capacità rispetto ad Ω (definita in [4]). Si dimostra infatti nel presente lavoro che, per le funzioni di $H^{1,p}(\Omega)$, le diseguaglianze nel senso di $H^{1,p}(\Omega)$ (vedi [6]) coincidono con le diseguaglianze nel senso della capacità rispetto ad Ω (per l'enunciato preciso si veda il teorema 2).

2. – Notazioni e ipotesi.

Sia Ω un sottoinsieme aperto limitato e connesso di R^n con $n \geq 2$. Sia $1 \leq p < n$ e siano $H^{1,p}(\Omega)$, $H_0^{1,p}(\Omega)$ gli spazi ottenuti completando rispettivamente $C^1(\bar{\Omega})$, $C_0^1(\Omega)$ secondo la norma

$$\|u\|_{H^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L_p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \|u_{x_i}\|_{L_p(\Omega)} .$$

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del « Centro di matematica e fisica teorica » del Consiglio Nazionale delle Ricerche presso l'Università di Genova.

Sia B un sottoinsieme compatto di $\overline{\Omega}$, k costante, $u \in H^{1,p}(\Omega)$. Diremo che $u \leq k$ in B nel senso di $H^{1,p}(\Omega)$ se esiste una successione $u_j \in C^1(\overline{\Omega})$ tale che $u_j \leq k$ in B e $\lim \|u - u_j\|_{H^{1,p}(\Omega)} = 0$. Poniamo poi

$$\max_B{}^* u = \inf \{k : u \leq k \text{ in } B \text{ nel senso di } H^{1,p}(\Omega)\}. \tag{1}$$

Definiamo la capacità di B rispetto ad Ω: è il numero

$$\operatorname{cap}_\Omega B = \inf \{\|f\|^p_{H^{1,p}(\Omega)} : f \in C^1(\overline{\Omega}),\ f \geq 1 \text{ in } B\}. \tag{2}$$

Invece la ordinaria capacità di B si definisce nel modo seguente:

$$\operatorname{cap} B = \inf \{\|f_x\|^p_{L_p(R^n)} : f \in C^1_0(R^n),\ f \geq 1 \text{ in } B\}. \tag{3}$$

(Questa capacità è connessa con quella della teoria del potenziale: vedi [8]) (*).

Le definizioni di capacità (2) e (3) non sono sempre equivalenti (si veda la proposizione in appendice). Vale tuttavia il seguente

LEMMA 1. – « *Sia B un sottoinsieme compatto di $\overline{\Omega}$. Allora esiste una costante K_1, dipendente da n, p, Ω tale che*

$$\operatorname{cap}_\Omega B \leq K_1 \operatorname{cap} B. \tag{4}$$

Sia soddisfatta una (almeno) delle seguenti condizioni:

a) la frontiera di Ω è localmente lipschitziana;

b) l'aperto Ω gode della proprietà di cono;

c) B è contenuto in Ω.

Allora esiste una costante K_2 dipendente da p, n, Ω e dalla distanza tra B e $\partial\Omega$ tale che

$$\operatorname{cap} B \leq K_2 \operatorname{cap}_\Omega B \text{ ».} \tag{5}$$

DIMOSTRAZIONE (tratta in parte da [2]). – Sia $\varepsilon > 0$, $v \in C^1_0(R^n)$, $v \geq 1$ in B, $\|v_x\|^p_{L_p(R^n)} \leq \operatorname{cap} B + \varepsilon$. Per noti teoremi sugli spazi di SOBOLEV esiste una costante K_3 dipendente solo da n e p tale che

$$\|u\|_{L_{\frac{pn}{n-p}}(R^n)} \leq K_3 \|u_x\|_{L_p(R^n)} \tag{6}$$

(*) Ovviamente le quantità definite nelle (2), (3) dipendono anche da p. Essendo p fissato, non si è indicata tale dipendenza per comodità di notazioni.

per ogni $u \in C_0^1(R^n)$. Dalla (6) e dalla diseguaglianza di HÖLDER segue

$$\|u\|_{H^{1,p}(\Omega)} \leq [1 + K_3 (\text{mis } \Omega)^{1/n}] \cdot \|u_x\|_{L_p(R^n)}$$

per ogni $u \in C_0^1(R^n)$. Da cui:

$$\text{cap}_\Omega B \leq \|v\|^p_{H^{1,p}(\Omega)} \leq [1 + K_3 (\text{mis } \Omega)^{1/n}]^p \cdot \|v_x\|^p_{L_p(R^n)} \leq$$
$$\leq [1 + K_3 (\text{mis } \Omega)^{1/n}]^p \cdot (\text{cap } B + \varepsilon).$$

Per l'arbitrarietà di ε si ottiene la (4).

Dimostriamo la (5) nella ipotesi a). Per noti teoremi (vedi ad esempio [1]) esiste in questo caso una costante K_4 dipendente da Ω, n, p tale che se $u \in C^1(\bar{\Omega})$ esiste una funzione $\tilde{u} \in C_0^1(R^n)$, $u = \tilde{u}$ in $\bar{\Omega}$, $\|\tilde{u}\|_{H^{1,p}(R^n)} \leq K_4 \|u\|_{H^{1,p}(\Omega)}$.

Sia $\varepsilon > 0$, $v \in C^1_u(\bar{\Omega})$, $v \geq 1$ in B, $\|v\|^p_{H^{1,p}(\Omega)} \leq \text{cap}_\Omega B + \varepsilon$. Allora esiste $\tilde{v} \in C_0^1(R^n)$ con $\tilde{v} = v$ in $\bar{\Omega}$, $\|\tilde{v}\|_{H^{1,p}(R^n)} \leq K_4 \|v\|_{H^{1,p}(\Omega)}$. Ne segue:

$$\text{cap } B \leq \|\tilde{v}_x\|^p_{L_p(R^n)} \leq K_4^p \|v\|^p_{H^{1,p}(\Omega)} \leq K_4^p (\text{cap}_\Omega B + \varepsilon),$$

e per l'arbitrarietà di ε si ottiene la (5).

Dimostriamo ora la (5) nella ipotesi b). Essendo Ω dotato della proprietà di cono, per [5] teorema 1.I esiste un numero finito di aperti $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_l$ ciascuno dotato di frontiera localmente lipschitziana e tali che $\bigcup_{i=1}^{l} \Omega_i = \Omega$.

Si ha allora:

$$\text{cap } B = \text{cap } B \cap \bar{\Omega} = \text{cap } B \cap \bigcup_{i=1}^{l} \bar{\Omega}_i = \tag{7}$$
$$= \text{cap} \bigcup_{i=1}^{l} \overline{B \cap \Omega_i} \leq \sum_{i=1}^{l} \text{cap } \overline{B \cap \Omega_i}.$$

Per quanto già dimostrato nel caso a), risulta

$$\text{cap } \overline{B \cap \Omega_i} \leq H_i \, \text{cap}_{\Omega_i} \overline{B \cap \Omega_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, l) \tag{8}$$

ove H_i sono costanti dipendenti da p, n, Ω_i.

Dalla definizione (2) si deduce facilmente che

$$\text{cap}_{\Omega_i} \overline{B \cap \Omega_i} \leq \text{cap}_\Omega B \qquad (i = 1, 2, \ldots, l) \tag{9}$$

Dalle (7), (8), (9) si ha infine

$$\operatorname{cap} B \leqslant \sum_{i=1}^{l} H_i \operatorname{cap}_\Omega B$$

e la tesi è provata con $K_1 = \sum_{i=1}^{l} H_i$.

Dimostriamo ora la (5) nella ipotesi c). Sia v scelta come nel caso a). Essendo dist $(B, \partial\Omega) > 0$ esiste una funzione $\varphi \in C_0^1(\Omega)$ tale che $\varphi \equiv 1$ in B, $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$ in Ω, $|\varphi_x| \leqslant K_5$, ove K_5 dipende solo dalla distanza tra $\partial\Omega$ e B.

Risulta allora

$$\|(\varphi v)_x\|_{L_p(\Omega)} \leqslant K_6 \|v\|_{H^{1,p}(\Omega)} \tag{10}$$

ove K_6 dipende da p, n, Ω, K_5. Dalla definizione di cap B, dalla (10) e dalla scelta di v segue:

$$\operatorname{cap} B \leqslant \|(\varphi v)_x\|^p_{L_p(\Omega)} \leqslant K_6^p \|v\|^p_{H^{1,p}(\Omega)} \leqslant K_6^p(\operatorname{cap}_\Omega B + \varepsilon)$$

da cui la tesi, c.v.d.

È possibile definire la capacità rispetto ad Ω anche per sottoinsiemi non compatti di $\bar{\Omega}$. Sia A un insieme relativamente aperto in $\bar{\Omega}$ (cioè $A = A_1 \cap \bar{\Omega}$ con A_1 aperto in R^n). Allora si pone

$$\operatorname{cap}_\Omega A = \sup \{\operatorname{cap}_\Omega B \colon B \text{ compatto}, \ B \subset A\} . \tag{11}$$

Se poi G è un sottoinsieme qualunque di $\bar{\Omega}$, si pone

$$\operatorname{cap}_\Omega G = \inf \{\operatorname{cap}_\Omega A \colon A \supset G, \ A \text{ relativamente aperto in } \bar{\Omega}\} . \tag{12}$$

A questo punto occorre far vedere che la (12) è coerente colla (2), nel caso in cui G sia compatto. Basta dimostrare che, se G è compatto, fissato $\varepsilon > 0$ e presa una funzione $g \in C^1(\bar{\Omega})$, $g \geqslant 1$ in B, esiste un insieme A relativamente aperto in $\bar{\Omega}$, $A \supset G$, in modo che

$$\operatorname{cap}_\Omega A \leqslant \|g\|^p_{H^{1,p}(\Omega)} + \varepsilon . \tag{13}$$

Come insieme A basta prendere il seguente:

$$A = \{x \colon x \in \bar{\Omega}, \ g(x) > 1 - \eta\}$$

ove η è scelto in modo che

$$\|g\|^p_{H^{1,p}(\Omega)} \leqslant (1-\eta)^p \cdot [\|g\|^p_{H^{1,p}(\Omega)} + \varepsilon] \,. \tag{14}$$

Ovviamente $A \supset G$; A è relativamente aperto in $\bar{\Omega}$ perchè $\bar{\Omega} - A$ è compatto. Inoltre se B è un compatto contenuto in A risulta

$$\operatorname{cap}_\Omega B \leqslant \left\| \frac{g}{1-\eta} \right\|^p_{H^{1,p}(\Omega)} = \frac{1}{(1-\eta)^p} \|g\|^p_{H^{1,p}(\Omega)} \,,$$

e dalla (14):

$$\operatorname{cap}_\Omega B \leqslant \|g\|^p_{H^{1,p}(\Omega)} + \varepsilon \,,$$

cioè, per la (11), si ottiene la (13).

La capacità rispetto ad Ω così definita è una funzione d'insieme subadditiva (proprietà ben nota per la capacità della teoria del potenziale). Cioè vale il:

LEMMA 2. – « *Sia $\{G_i\}_{i \in N}$ una successione di sottoinsiemi di $\bar{\Omega}$. Risulta*

$$\operatorname{cap}_\Omega \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} G_i \right) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{cap}_\Omega G_i \text{ »} .$$

DIMOSTRAZIONE. – Sia $\varepsilon > 0$. Siano A_i dei sottoinsiemi relativamente aperti in $\bar{\Omega}$ tali che $A_i \supset G_i$ e

$$\operatorname{cap}_\Omega A_i \leqslant \operatorname{cap}_\Omega G_i + 2^{-i}\varepsilon \qquad (i = 1, 2, \ldots) \,. \tag{15}$$

Essendo $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ relativamente aperto in $\bar{\Omega}$, dalla (12) si ha:

$$\operatorname{cap}_\Omega \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} G_i \right) \leqslant \operatorname{cap}_\Omega \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) . \tag{16}$$

Sia F un compatto contenuto in $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Allora esiste un intero m con $F \subset \bigcup_{i=1}^{m} A_i$. Siano F_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ dei compatti tali che $F_i \subset A_i$, $\bigcup_{i=1}^{m} F_i = F$. Dalla (2) si verifica facilmente che

$$\operatorname{cap}_\Omega F \leqslant \sum_{i=1}^{m} \operatorname{cap}_\Omega F_i \,. \tag{17}$$

Dalle (17) e (11) si ricava:

$$\operatorname{cap}_\Omega F \leqslant \sum_{i=1}^{m} \operatorname{cap}_\Omega A_i \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{cap}_\Omega A_i$$

da cui, per la (11) e per l'arbitrarietà di F:

$$\operatorname{cap}_\Omega \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{cap}_\Omega A_i . \tag{18}$$

Dalle (15), (16), (18) infine:

$$\operatorname{cap}_\Omega \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} G_i \right) \leqslant \operatorname{cap}_\Omega \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{cap}_\Omega A_i \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{cap}_\Omega G_i + \varepsilon .$$

Dall'arbitrarietà di ε segue la tesi, c.v.d.

3. – Risultati.

TEOREMA 1. – « *Sia* $u \in H^{1,p}(\Omega)$, $\varphi_j \in C^1(\bar{\Omega})$, $\lim_{j\to\infty} \|\varphi_j - u\|_{H^{1,p}(\Omega)} = 0$. *Allora esiste una successione* $\{\varphi_{j_l}\}$ *estratta da* $\{\varphi_j\}$ *che converge in tutti i punti di* $\bar{\Omega}$ *salvo che in quelli di un sottoinsieme di* $\bar{\Omega}$ *avente capacità nulla rispetto ad* Ω. *Inoltre per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste un insieme* A *relativamente aperto in* $\bar{\Omega}$ *tale che* $\operatorname{cap}_\Omega A < \varepsilon$ *e la successione* $\{\varphi_{j_l}\}$ *converge uniformemente in* $\bar{\Omega} - A$ ».

DIMOSTRAZIONE. – È ben nota (vedi ad esempio [3]) e la riporto soltanto per completezza. Sia $\{\psi_l\} = \{\varphi_{j_l}\}$ una successione estratta da $\{\varphi_j\}$ in modo che la serie

$$\sum_{l=0}^{\infty} 2^{pl} \|\psi_{l+1} - \psi_l\|^p_{H^{1,p}(\Omega)}$$

sia convergente.

Poniamo

$$E_l = \{x : x \in \bar{\Omega},\ |\psi_{l+1}(x) - \psi_l(x)| \geqslant 2^{-l}\}, \qquad A_h = \bigcup_{l=h}^{\infty} E_l .$$

Dalla (2) segue subito:

$$\operatorname{cap}_\Omega E_l \leqslant 2^{pl} \|\psi_{l+1} - \psi_l\|^p_{H^{1,p}(\Omega)}$$

e dal lemma 2:

$$\operatorname{cap}_\Omega A_h \leqslant \sum_{l=h}^{\infty} \operatorname{cap}_\Omega E_l \leqslant \sum_{l=h}^{\infty} 2^{pl} \|\psi_{l+1} - \psi_l\|^p_{H^{1,p}(\Omega)} .$$

Di qui si deduce che

$$\lim_{h\to\infty} \operatorname{cap}_\Omega A_h = 0 .$$

D'altronde si vede subito che in $\bar{\Omega} - A_h$ la successione $\{\psi_l\}$ converge uniformemente. Tenendo presente la (12) si ha facilmente la tesi, c.v.d.

OSSERVAZIONE. – Il teorema precedente permette di precisare le funzioni di $H^{1,p}(\Omega)$ in tutti i punti di $\bar{\Omega}$ salvo che in quelli di un sottoinsieme di $\bar{\Omega}$ avente capacità nulla rispetto ad Ω. È facile verificare l'indipendenza della funzione u così precisata dalla successione $\varphi_j \in C^1(\bar{\Omega})$, $\lim_{j\to\infty} \|\varphi_j - u\|_{H^{1,p}(\Omega)} = 0$, di partenza.

Possiamo ora enunciare il risultato principale del presente lavoro.

TEOREMA 2. – « *Sia* $u \in H^{1,p}(\Omega)$ *precisata nel senso detto sopra. Sia* B *compatto,* B *contenuto in* $\bar{\Omega}$; *risulta*

$$\max_B{}^* u = \inf_F \{\max_{B-F} u : \operatorname{cap}_\Omega F = 0\} \text{ ».}$$

DIMOSTRAZIONE. – Poniamo

$$m_1 = \max_B{}^* u , \qquad m_2 = \inf_F \{\max_{B-F} u : \operatorname{cap}_\Omega F = 0\}$$

e facciamo vedere intanto che $m_1 \geqslant m_2$. Fissato $\varepsilon > 0$, esiste una successione $u_j \in C^1(\bar{\Omega})$ tale che $u_j \leqslant m_1 + \varepsilon$ in B e $\lim_{j\to\infty} \|u - u_j\|_{H^{1,p}(\Omega)} = 0$. Dalla dimostrazione del teorema 1 segue che una successione estratta da $\{u_j\}$ converge in tutti i punti di $\bar{\Omega}$ tranne che in quelli di un sottoinsieme F di $\bar{\Omega}$ avente capacità nulla rispetto ad Ω. Ne segue che $u \leqslant m_1 + \varepsilon$ in tutti i punti di $B - F$, da cui $m_2 \leqslant m_1 + \varepsilon$. Per l'arbitrarietà di ε è $m_2 \leqslant m_1$.

Dimostriamo il viceversa: per assurdo sia $m_1 > m_2$.

Scelto ε in modo che $0 < \varepsilon < (m_1 - m_2)/2$, per definizione di $\max_B^* u$ esiste una successione $u_j \in C^1(\bar{\Omega})$, $u_j \leqslant m_1 + \varepsilon$ in B, $\lim_{j\to\infty} \|u - u_j\|_{H^{1,p}(\Omega)} = 0$. Posto $A_j = \{x : x \in B,\ u_j(x) \geqslant m_1 - \varepsilon\}$ vediamo che risulta $\lim_{j\to\infty} \operatorname{cap}_\Omega A_j = 0$. Infatti per definizione di m_2 esiste un insieme F tale che $\operatorname{cap}_\Omega F = 0$ e $u \leqslant m_2 + \varepsilon$ in $B - F$. Per il teorema 1 fissato $\delta > 0$ esiste un insieme A relativamente aperto in $\bar{\Omega}$ tale che $\operatorname{cap}_\Omega A < \delta$ e $\lim_{j\to\infty} u_j(x) = u(x)$ uniformemente in $B - A$.

Ne segue, per la scelta di ε, che definitivamente è $A_j \subset A$. Pertanto resta provato che $\lim_{j\to\infty} \operatorname{cap}_\Omega A_j = 0$. Allora esiste una successione

$\varphi_j \in C^1(\bar{\Omega})$ tale che: $\varphi_j \leqslant 0$ in $\bar{\Omega}$, $\varphi_j \leqslant -2\varepsilon$ in A_j, $\lim_{j\to\infty} \|\varphi_j\|_{H^{1,p}(\Omega)} = 0$. Da cui si ottiene: $\varphi_j + u_j \leqslant m_1 - \varepsilon$ in B, $\lim_{j\to\infty} \|\varphi_j + u_j - u\|_{H^{1,p}(\Omega)} = 0$, il che è assurdo per definizione di m_1, c.v.d.

4. – Appendice.

Le definizioni (2) e (3) non sono sempre equivalenti, come si può vedere dalla seguente

PROPOSIZIONE. – « *Sia B un insieme compatto limitato di R^n avente misura nulla e capacità positiva. Allora esiste un insieme Ω (dipendente da B) aperto e limitato in R^n, tale che $\bar{\Omega} \supset B$ e*

$$\operatorname{cap}_\Omega B = 0 \text{ ».}$$

DIMOSTRAZIONE. – Osserviamo innanzi tutto che insiemi B come quello descritto sopra esistono: basta prendere come B ad esempio la frontiera di un aperto limitato regolare.

Dato B, definiamo i seguenti insiemi:

$$A_k = \left\{x: x \in R^n, \frac{1}{2k+1} < \operatorname{dist}(x, B) < \frac{1}{2k}\right\}$$

per $k = 1, 2, \ldots$. Poniamo poi

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k .$$

Ω è un insieme aperto limitato in R^n la cui chiusura contiene B Consideriamo le funzioni

$$\varphi_h(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x \in \bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \bar{A}_3 \cup \ldots \cup \bar{A}_{h-1} \\ 1 & \text{per } x \in \bar{A}_h \cup \bar{A}_{h+1} \cup \ldots \\ 1 & \text{per } x \in B . \end{cases}$$

Risulta $\varphi_h \in C^1(\bar{\Omega})$, $\varphi_h = 1$ in B, $\|\varphi_h\|_{H^{1,p}(\Omega)} = \operatorname{mis}\left(\bigcup_{h=k}^{\infty} A_k\right)$ per $h = 1, 2, \ldots$. Se ne deduce

$$\lim_{h\to\infty} \|\varphi_h\|_{H^{1,p}(\Omega)} = 0$$

e ciò prova che $\operatorname{cap}_\Omega B = 0$, c.v.d.

BIBLIOGRAFIA

[1] R. ADAMS - N. ARONSZAJN - K. T. SMITH, *Theory of Bessel potentials, part 2*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **17** (1967), pp. 1-136.

[2] M. CHICCO, *Principio di massimo per soluzioni di problemi al contorno misti per equazioni ellittiche di tipo variazionale*, Boll. Un. Mat. Ital., S. IV, **3** (1970), pp. 384-394.

[3] J. DENY - L. LIONS, *Les espaces de B. Levi*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **5** (1953-54), pp. 305-370.

[4] W. F. DONOGHUE, *A coerciveness inequality*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, (3), **20** (1966), pp. 589-593.

[5] E. GAGLIARDO, *Proprietà di alcune classi di funzioni in più variabili*, Ricerche Mat., **7** (1958), pp. 102-137.

[6] W. LITTMAN - G. STAMPACCHIA - H. F. WEINBERGER, *Regular points for elliptic equations with discontinuous coefficients*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, (3), **17** (1963), pp. 43-77.

[7] G. STAMPACCHIA, *Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **15** (1965), pp. 189-258.

[8] H. WALLIN, *A connection between α-capacity and L^p-classes of differentiable functions*, Ark. Mat., **5** (1964), pp. 331-341.

Pervenuta alla Segreteria dell' U. M. I.
il 20 febbraio 1971