Equazioni a derivate parziali. — *Controesempi sulla regolarità delle derivate delle soluzioni di equazioni ellittiche* (*). Nota di MAURIZIO CHICCO (**), presentata (***) dal Corrisp. E. MAGENES.

SUMMARY. — We give some counterexamples concerning the regularity of the first (resp. second) derivatives of solutions of linear second order elliptic partial differential equations in divergence form (resp. in non-divergence form).

1. INTRODUZIONE

In un aperto Ω contenuto in R^n, si può considerare un'equazione differenziale alle derivate parziali, lineare, del secondo ordine, uniformemente ellittica, o in forma variazionale

$$(1) \qquad \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, u_{x_i}\, \varphi_{x_j}\, dx = \int_\Omega \left\{ f_0\, \varphi + \sum_{i=1}^{n} f_i\, \varphi_{x_i} \right\} dx \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

o in forma non variazionale

$$(2) \qquad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, u_{x_i x_j} = f \qquad \text{q. o. in } \Omega .$$

Come è ben noto, le soluzioni di tali equazioni sono tanto più regolari quanto più lo sono i coefficienti ed i termini noti delle equazioni stesse. Limitandosi a considerare le derivate prime delle soluzioni per l'equazione (1) e le derivate seconde delle soluzioni per l'equazione (2), si conoscono ad esempio i seguenti risultati.

Se i coefficienti ed i termini noti dell'equazione (1) sono hölderiani in $\bar{\Omega}$ con esponente $\alpha\,(0 < \alpha < 1)$, allora le soluzioni dell'equazione (1) hanno derivate prime localmente hölderiane in Ω collo stesso esponente α (vedi ad esempio [5], pag. 149-157). Sotto opportune ipotesi sulla frontiera di Ω e sulle condizioni al contorno assunte su di essa dalla soluzione, l'hölderianità delle derivate della soluzione è uniforme in $\bar{\Omega}$. (Osservazioni analoghe si potranno ripetere per i successivi risultati di regolarità). Se i coefficienti a_{ij} sono continui in $\bar{\Omega}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ ed $f_i \in L_p(\Omega)$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$, con $1 < p < +\infty$, allora ogni soluzione u della (1) ha le derivate prime localmente sommabili della stessa potenza p (vedi ad esempio ancora [5] oppure [6]). Se infine i coefficienti a_{ij}, pur non essendo continui in Ω, appartengono allo spazio $H^{1,n}(\Omega)$ (cioè hanno le derivate prime, nel senso delle distribuzioni, di potenza n sommabile in Ω), e $f_0 \in L_p(\Omega)$, $f_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ con $p \geq 2$, allora si può concludere che $u \in H^{1,q}_{loc}(\Omega)$, essendo q reale qualunque se $p \geq n$, e $q = pn/(n-p)$ se $2 \leq p < n$: vedi [4].

Passando a considerare l'equazione in forma non variazionale (2), si può affermare che se i coefficienti e i termini noti di essa sono hölderiani in $\bar{\Omega}$ con esponente $\alpha\,(0 < \alpha < 1)$, le soluzioni hanno le derivate *seconde* localmente hölderiane in Ω con lo stesso esponente (maggiorazioni di Schauder-Caccioppoli: vedi ad esempio [3] oppure [5]). Se $a_{ij} \in C^0(\bar{\Omega})$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ e $f \in L_p(\Omega)$ $(1 < p < +\infty)$, le soluzioni u della equazione (2) hanno le derivate *seconde* localmente ancora sommabili di potenza p (vedi ad esempio [1], [2]).

Scopo della presente Nota è fornire alcuni semplici esempi di equazioni, del tipo (1) oppure (2), che non soddisfano alle ipotesi suddette ed hanno soluzioni le cui derivate non sono regolari nel modo indicato. In particolare si risponde in senso negativo ad una questione lasciata esplicitamente aperta nel citato lavoro [4] (pag. 358): se i coefficienti a_{ij} sono in $H^{1,n}(\Omega)$, od anche continui in $\bar{\Omega}$, con f_i comunque regolari $(i = 0, 1, \ldots, n)$, l'equazione (1) può avere soluzioni dotate di derivate prime non limitate in Ω.

Ringrazio il prof. Francesco Guglielmino per le sue utili osservazioni.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del « Gruppo Nazionale di Analisi Funzionale ed Applicazioni » del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(**) Istituto di Matematica. Università di Genova.

(***) Nella seduta del 10 dicembre 1983.

2. CONTROESEMPI RELATIVI ALLE EQUAZIONI IN FORMA VARIAZIONALE

Sia S la sfera $S = \{x \in R^n : |x| < 1/2\}$ $(n \geq 2)$; si consideri l'equazione

$$(3) \qquad \int_S \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}\, \varphi_{x_i}\, dx = \int_S \sum_{i=1}^{n} f_i\, \varphi_{x_i}\, dx \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(S)$$

ove

$$(4) \qquad \begin{cases} f_1 = \alpha\,(n-1)^{-1} \left[-n x_1 \left(x_1 - \sum_{j=2}^{n} x_j \right) \rho^{-2} + 1 \right] |\log \rho|^{\alpha-1}, \\ f_i = \alpha\,(n-1)^{-1} \left[-n x_i \left(x_1 - \sum_{j=2}^{n} x_j \right) \rho^{-2} - 1 \right] |\log \rho|^{\alpha-1} \\ \qquad\qquad (i = 2, 3, \cdots, n) \end{cases}$$

essendo α una costante con $0 < \alpha < 1$ e $\rho = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}$. Evidentemente tali funzioni, prolungate per continuità nell'origine, risultano continue e limitate in $\bar{S}$. La funzione

$$(5) \qquad u = \left(x_1 - \sum_{j=2}^{n} x_j \right) |\log \rho|^{\alpha}$$

ha tutte le derivate prime non limitate in S, ed è ivi soluzione della equazione (3). Tale funzione u appartiene tuttavia ad $H^{1,p}(S)$ per ogni p reale (rispettando i risultati menzionati nell'introduzione).

Si osservi ancora che le funzioni f_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ definite dalle (4), benché continue in S, non sono ivi « continue secondo Dini », cioè dotate di modulo di continuità ω tale che

$$\int_0^1 [\omega(t)/t]\, dt < +\infty .$$

Se infatti le funzioni f_i soddisfacessero tale condizione, ogni soluzione della (3) avrebbe le derivate prime (localmente) continue in S. (Si veda ad esempio l'osservazione a pag. 54 di [5]).

Dando ad u ed a f_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ lo stesso significato di prima, poniamo ora

$$(6) \qquad g_i = f_i / u_{x_i} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

Allora l'equazione (3) si può evidentemente riscrivere

$$(7) \qquad \int_{S_1} \sum_{i=1}^{n} (1 - g_i)\, u_{x_i}\, \varphi_{x_i}\, dx = 0 \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(S_1)$$

essendo S_1 una sfera di centro l'origine scelta in modo che in essa le funzioni g_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ siano maggiori di $-1/2$: ciò è possibile poiché

$$\lim_{\rho \to 0} g_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

La (7) è un'equazione del tipo (1), uniformemente ellittica in S_1, i cui coefficienti sono continui in $\bar{S}_1$, ed il secondo membro è nullo. Pertanto la continuità dei coefficienti a_{ij} nell'equazione (1) non assicura la continuità né la limitatezza delle derivate prime della soluzione u. Come nell'esempio precedente, si può osservare che le funzioni g_i non sono continue secondo Dini.

Si verifica poi facilmente che per $\rho \to 0$ le derivate prime di u tendono all'infinito dello stesso ordine di $|\log \rho|^{\alpha}$, mentre risulta, sempre per ρ tendente a zero:

$$\begin{aligned} f_i &= 0\,(|\log \rho|^{\alpha}) \\ u_{x_i x_j} &= 0\,(\rho^{-1} |\log \rho|^{\alpha-1}) \\ (f_i)_{x_j} &= 0\,(\rho^{-1} |\log \rho|^{\alpha-1}) \qquad (i, j = 1, 2, \cdots, n). \end{aligned}$$

Da ciò si deduce immediatamente che

$$(g_i)_{x_j} = 0\,(\rho^{-1} |\log \rho|^{-1}) \qquad (i, j = 1, 2, \cdots, n)$$

e quindi le funzioni g_i appartengono anche ad $H^{1,n}(S_1)$. La (7) costituisce pertanto un esempio di equazione con coefficienti $a_{ij} \in H^{1,n}(S_1) \cap C^0(\bar{S}_1)$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ e con secondo membro nullo, avente una soluzione dotata di derivate prime non limitate in S_1.

3. CONTROESEMPI RELATIVI ALLE EQUAZIONI IN FORMA NON VARIAZIONALE

Essendo ancora S la sfera $\{x \in R^n : |x| < 1/2\}$ $(n \geq 2)$, si considerino in S le funzioni

$$u = \left[(n-1)\, x_1^2 - \sum_{j=2}^{n} x_j^2 \right] |\log \rho|^{\alpha} \qquad (0 < \alpha < 1),$$

$$f = \alpha \rho^{-2} \left[(n-1)\, x_1^2 - \sum_{j=2}^{n} x_j^2 \right] |\log \rho|^{\alpha-1} \left[-(n+2) + (\alpha - 1)\, |\log \rho|^{-1} \right].$$

Come è facile verificare le derivate seconde pure di u non sono limitate in S, mentre al contrario f è infinitesima per ρ tendente a zero e quindi prolungabile per continuità nell'origine in modo da risultare continua in $\bar{S}$. Risulta d'altra parte

$$\Delta u = f \qquad \text{q.o. in } S .$$

(Un altro esempio di funzione v con derivate seconde non continue e tale che $\Delta v = g$ sia continua si può trovare in [5], pag. 54. Tale esempio tuttavia definisce v come « potenziale » di g e quindi è forse meno immediato di quello esposto sopra).

Procedendo in modo simile a quanto fatto nella prima parte sia

$$(8) \qquad h_i = f / n u_{x_i x_i} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

Si verifica facilmente che le funzioni h_i sono ben definite in una sfera abbastanza piccola S_2 centrata nell'origine, ivi continue ed infinitesime per ρ che tende a zero. È facile pure osservare che tali funzioni, come le g_i considerate in precedenza, sono tali che per ρ tendente a zero

$$|(h_i)_{x_j}| = 0\,(\rho^{-1}\,|\log \rho\,|^{-1}) \qquad (i\,, j = 1\,, 2\,, \cdots, n)$$

e quindi risulta $h_i \in H^{1,n}(S_2)\,(i = 1\,, 2\,, \ldots, n)$. Allora l'equazione $\Delta u = f$ in S_2 si può riscrivere

$$\sum_{i=1}^{n} (1 - h_i)\, u_{x_i x_i} = 0 \qquad \text{q.o. in } S_2\,. \tag{9}$$

Il raggio di S_2 può essere altresì scelto in modo che $1 - h_i \geq 1/2$ in $S_2\,(i = 1\,, 2\,, \ldots, n)$ e quindi l'equazione (9) sia uniformemente ellittica in S_2. La (9) è pertanto un esempio di equazione del tipo (2) con coefficienti $a_{ij} \in C^0(\overline{S}_2) \cap H^{1,n}(S_2)\,(i\,, j = 1\,, 2\,, \cdots, n)$ e dotata di una soluzione avente derivate seconde pure non limitate in S_2. Anche in questo caso né la funzione f né le funzioni h_i sono continue secondo Dini, potendosi a tale proposito ripetere l'osservazione già fatta in precedenza (si veda ancora ad esempio [5]).

Bibliografia

[1] Greco D. (1956) – *Nuove formule integrali di maggiorazione per le soluzioni di un'equazione lineare di tipo ellittico ed applicazioni alla teoria del potenziale*, « Ricerche Mat. », *5*, 126–149.

[2] Košelev A.I. (1962) – *A priori estimates in L_p and generalized solutions of elliptic equations and systems*, « Amer. Math. Soc. Transl. » (2) *20*, 105–171.

[3] Ladyženskaya O.A. e Ural'tseva N.N. (1968) – *Linear and quasilinear elliptic equations*, Academic Press, New York.

[4] Miranda C. (1963) – *Sulle equazioni ellittiche del secondo ordine di tipo non variazionale a coefficienti discontinui*, « Ann. Mat. Pura Appl. » (4) *63*, 353–386.

[5] Morrey C.B. Jr. (1966) – *Multiple integrals in the calculus of variations*, Springer–Verlag, Berlin.

[6] Simader C.G. (1972) – *On the Dirichlet's boundary value problem*, Springer–Verlag, Berlin.

Equazioni a derivate parziali. — *On the Stefan problem with energy specification.* Nota (*) di Pierluigi Colli, presentata (**) dal Corrisp. E. Magenes.

Riassunto. — Vengono trattati due problemi di Stefan con la specificazione dell'energia. Dapprima si fornisce una formulazione debole di un problema unidimensionale ad una fase studiato in [4]: si dimostra un risultato di esistenza. In seguito si considera un problema di Stefan pluridimensionale e multifase in cui viene assegnata la energia totale del sistema ad ogni istante; si mostra l'esistenza e l'unicità della soluzione per due formulazioni provando inoltre l'equivalenza fra queste.

0. Introduction

In this work we study a Stefan problem with an unusual boundary condition which aims to represent an energy specification. We start from the consideration of two papers by Cannon and van der Hoek [4, 5], which deal with two one-dimensional Stefan problems of one phase and two phases respectively, with the following condition:

$$\int_0^{s(t)} \theta\,(x\,, t)\,\mathrm{d}x = \mathrm{E}\,(t) \tag{0.1}$$

where θ is the temperature of the system, $s(t)$ is the free boundary, $\mathrm{E}(t)$ is given. In both cases they proved existence and uniqueness results, exploiting typical methods of the one-dimensional case.

Here, in section 1, we study the one-phase problem in a weak formulation, transforming the unknown θ by time and space integrations, following Baiocchi [1] and Duvant [8]. We introduce the "freezing index" $w\,(x\,, t) = \int_0^t \theta\,(x\,, \tau)\,\mathrm{d}\tau$ and also the function $z\,(x\,, t) = \int_x^c w\,(\xi\,, t)\,\mathrm{d}\xi$. Now z satisfies a non-linear equation, for which we prove the existence of at least one solution.

(*) Dipartimento di Matematica, Università di Pavia. Lavoro svolto nell'ambito della collaborazione con l'Istituto di Analisi Numerica del C.N.R. di Pavia.

(**) Nella seduta del 10 dicembre 1983.