Correzione alla Nota « Terzo problema al contorno per una classe di equazioni ellittiche del secondo ordine a coefficienti discontinui » (*) (**).

MAURIZIO CHICCO (Genova)

La dimostrazione del teorema 3 di [2] è errata, in quanto si basa su un uso improprio del principio di uniforme limitatezza. Propongo pertanto una nuova dimostrazione, rinviando a [2], [1] per notazioni ed ipotesi.

TEOREMA. – *Esistono due costanti positive λ_0 e K_1, dipendenti da n, Ω, e dai coefficienti di L, tali che*

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leqslant K_1 \|Lu + \lambda u\|_{L_2(\Omega)}$$

uniformemente per ogni $\lambda \geqslant \lambda_0$ e per ogni $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

DIMOSTRAZIONE. – Supponiamo per semplicità che la costante di ellitticità ν in [1], [2] valga 1: ciò non è restrittivo. Sia g una funzione soddisfacente alla (3) di [2]. Per il lemma 2 di [1] e il lemma 4 di [2] esiste un numero μ^*, dipendente da n, Ω e dai coefficienti di L, tale che se $\mu \in \boldsymbol{R}$, $\mu \geqslant \mu^*$ il problema di Dirichlet

$$\left\{\begin{array}{l} gLu + \mu u = f \quad q.\,o. \text{ in } \Omega\,, \\ u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \end{array}\right. \tag{1}$$

ha una ed una sola soluzione u (per ogni scelta di f in $L_2(\Omega)$); inoltre è $u \leqslant 0$ q. o. in Ω se $f \leqslant 0$ q. o. in Ω. In modo analogo (vedi [2]) esiste un numero λ^* tale che per ogni $\lambda \geqslant \lambda^*$ e per ogni $f \in L_2(\Omega)$ il problema di Dirichlet

$$\left\{\begin{array}{l} gLv + \lambda gv = f \quad q.\,o. \text{ in } \Omega\,, \\ v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \end{array}\right. \tag{2}$$

ammette una ed una sola soluzione v, che risulta non negativa q. o. in Ω se lo è f. Indichiamo con G_μ, G_λ rispettivamente gli operatori inversi di $gL + \mu I$, $gL + \lambda gI$

(*) Entrata in Redazione il 19 febbraio 1982.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'Istituto per la Matematica Applicata del C.N.R., Genova.

che risolvono i problemi (1), (2). Quindi se u è la soluzione del problema (1), risulta $u = G_\mu f$; analogamente se v è la soluzione del problema (2) risulta $v = G_\lambda f$. G_μ e G_λ sono operatori lineari limitati da $L_2(\Omega)$ sopra $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, e quindi operatori compatti da $L_2(\Omega)$ in sè.

Facciamo vedere che se $\mu \geqslant \mu^*$, $\lambda \geqslant \lambda^*$, $\lambda \geqslant \mu(\operatorname*{ess\,inf}_\Omega g)^{-1}$, $f \in L_2(\Omega)$, $f \geqslant 0$ q. o. in Ω, allora ne segue

$$0 \leqslant G_\lambda f \leqslant G_\mu f \quad \text{q. o. in } \Omega . \tag{3}$$

Infatti, posto $u = G_\mu f$, $v = G_\lambda f$, si può scrivere per le (1), (2):

$$gL(v - u) + \mu(v - u) = (\mu - \lambda g)v . \tag{4}$$

Per la scelta di λ, μ ed essendo, come già si è osservato, $v \geqslant 0$ q. o. in Ω, il secondo membro della (4) è non positivo q. o. in Ω; per la scelta di μ ($\geqslant \mu^*$) è quindi $v - u \leqslant 0$ q. o. in Ω, il che prova la (3). Posto

$$\|G_\lambda\| = \sup\{\|G_\lambda f\|_{L_2(\Omega)}\colon f \in L_2(\Omega),\ \|f\|_{L_2(\Omega)} \leqslant 1\}$$

e analogamente $\|G_\mu\|$, facciamo ora vedere che

$$\|G_\lambda\| \leqslant \|G_\mu\| \tag{5}$$

essendo λ, μ scelti come in precedenza. Si osservi intanto che, per ogni $f \in L_2(\Omega)$, risulta

$$|G_\lambda f| \leqslant G_\lambda |f| \quad \text{q. o. in } \Omega ; \tag{6}$$

ciò è una facile conseguenza del fatto che G_λ trasforma funzioni non negative in funzioni non negative. Fissato ad arbitrio $\varepsilon > 0$, sia $f^0 \in L_2(\Omega)$ tale che

$$\|f^0\|_{L_2(\Omega)} \leqslant 1 , \qquad \|G_\lambda\| \leqslant \|G_\lambda f^0\|_{L_2(\Omega)} + \varepsilon . \tag{7}$$

Per l'osservazione (6) non è restrittivo supporre $f^0 \geqslant 0$, quindi dalla (3) si ottiene

$$\|G_\lambda f^0\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \|G_\mu f^0\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \|G_\mu\| \tag{8}$$

e dalle (7), (8) per l'arbitrarietà di ε si ha la (5).

Occorre ora provare che esiste una costante K_2, dipendente da n, Ω e dai coefficienti di L, tale che per ogni μ reale e abbastanza grande risulti

$$\mu\|G_\mu\| \leqslant K_2 . \tag{9}$$

Infatti, posto

$$L^\wedge = -\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \, \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} g b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + gc$$

ove g, α_{ij} $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ sono funzioni soddisfacenti la (3) di [2], da [1] si deduce l'esistenza di costanti K_3, K_4, μ^0 tali che per ogni $\mu \geqslant \mu^0$, $\eta > 0$, $u \in H^2(\Omega) \cap \cap H^1_0(\Omega)$ risulti

$$(10) \qquad (1-\eta)\|u_{xx}\|^2_{L_2(\Omega)} + (\mu^2 - K_3\mu - K_4)\|u\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant \|L^\wedge u + \mu u\|^2_{L_2(\Omega)}\,.$$

(Le costanti K_3, K_4, μ^0 dipendono da n, Ω, η e dai coefficienti di $L^\wedge$). Dalla (10) si ottiene, per ogni $\delta > 0$:

$$(11) \qquad (1-\eta)\|u_{xx}\|^2_{L_2(\Omega)} + (\mu^2 - K_3\mu - K_4)\|u\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \\ \leqslant (1 + 1/\delta)\|gLu + \mu u\|^2_{L_2(\Omega)} + (1+\delta)\|gLu - L^\wedge u\|^2_{L_2(\Omega)}\,.$$

Detto k il primo membro della (3) di [2], essendo $0 < k < 1$ si può scegliere nella (11) $\delta > 0$ in modo che $(1+\delta)k < 1$, e poi η in modo che $1 - \eta - (1+\delta)k > 0$. Restano così determinate anche le costanti K_3, K_4, μ^0. Poi dalla (11) (procedendo come in [1] lemma 2) si ottiene una disuguaglianza del tipo

$$(12) \qquad \|u_{xx}\|^2_{L_2(\Omega)} + \mu^2\|u\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant K_2^2\|gLu + \mu u\|^2_{L_2(\Omega)}$$

con K_2 dipendente da n, Ω e dai coefficienti di $L^\wedge$ (e quindi da quelli di L). La (12) è valida per ogni $u \in H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$ e per ogni $\mu \geqslant \mu^*$, ove μ^* è una costante dipendente dagli stessi argomenti di K_2. Dalla (12) è immediato dedurre la (9).

Siamo ora in grado di provare l'asserto. Sia $\lambda \geqslant \lambda_0 = \max\{\lambda^*, (\operatorname*{ess\,inf}_\Omega g)^{-1}\mu^*\}$, $\mu = \lambda \operatorname*{ess\,inf}_\Omega g$. Con tali scelte di λ, μ, e tenendo presenti le (5), (9), (12) si ha, per ogni $u \in H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$:

$$\begin{aligned} \|u_{xx}\|_{L_2(\Omega)} &\leqslant K_2\|gLu + \mu^* u\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \\ &\leqslant K_2\|gLu + \lambda g u\|_{L_2(\Omega)} + K_2\|\lambda g - \mu^*\|_{L_\infty}\|u\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \\ &\leqslant K_2\|gLu + \lambda g u\|_{L_2(\Omega)} + K_2\lambda(\operatorname*{ess\,sup}_\Omega g)\|u\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \\ &\leqslant K_2[1 + K_2 \operatorname*{ess\,sup}_\Omega g\,(\operatorname*{ess\,inf}_\Omega g)^{-1}]\|g(Lu + \lambda u)\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \\ &\leqslant K_2 \operatorname*{ess\,sup}_\Omega g[1 + K_2 \operatorname*{ess\,sup}_\Omega g\,(\operatorname*{ess\,inf}_\Omega g)^{-1}]\|Lu + \lambda u\|_{L_2(\Omega)}\,. \end{aligned}$$

BIBLIOGRAFIA

[1] M. CHICCO, *Dirichlet problem for a class of linear second order elliptic partial differential equations with discontinuous coefficients*, Ann. Mat. Pura Appl., (4), **92** (1972), pp. 13-23.

[2] M. CHICCO, *Terzo problema al contorno per una classe di equazioni ellittiche del secondo ordine a coefficienti discontinui*, Ann. Mat. Pura Appl., (4), **112** (1977), pp. 241-259.