Bollettino U.M.I.
(6) 3-B (1984), 137-148

Appartenenza ad $H^{1,p}(\Omega)$ $(2 \leqslant p < +\infty)$ delle soluzioni di una classe di disequazioni variazionali ellittiche.

MAURIZIO CHICCO (*)

Summary. – *I prove that the solutions of some variational inequalities belong to* $H^{1,p}(\Omega)$ $(2 \leqslant p < +\infty)$.

1. – Introduzione.

Si considera la disequazione variazionale

$$(1) \qquad \begin{cases} a(u, v-u) \geqslant \displaystyle\int_\Omega \Big\{ \sum_{i=1}^n f_i v_{x_i} \Big\} dx, & \forall v \in K, \\ u \in K \end{cases}$$

essendo $K = \{\varphi \in H_0^1(\Omega) : \varphi \geqslant \psi \text{ in } \Omega\}$ con ψ funzione assegnata in $H^{1,p}(\Omega)$, $\psi \leqslant 0$ su $\partial\Omega$, e f_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ funzioni assegnate in $L_p(\Omega)$, con $2 \leqslant p < +\infty$. Nel lavoro [2], Boccardo ha dimostrato che la soluzione del problema (1) appartiene ad $H^{1,p}(\Omega)$ supponendo che la frontiera $\partial\Omega$ di Ω sia di classe C^2 e la forma bilineare $a(\cdot,\cdot)$ definita da

$$a(u, v) = \int_\Omega \sum_1^n a_{ij} u_{x_i} v_{x_j}\, dx$$

con $a_{ij} \in C^1(\bar\Omega)$ $(i, j = 1, 2, \dots, n)$.

Scopo del presente lavoro è provare lo stesso risultato, suppo-

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del gruppo di ricerca G.N.A.F.A. del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

nendo solamente $\partial\Omega$ di classe C^1 e la forma bilineare

$$(2)\qquad a(u,v)=\int_\Omega\left\{\sum_1^n a_{ij}u_{x_i}v_{x_j}+\sum_1^n(b_iu_{x_i}v+d_iuv_{x_i})+cuv\right\}dx$$

con a_{ij} appartenenti a $C^0(\bar\Omega)$ e b_i, d_i, c ad $L_\infty(\Omega)$ $(i, j=1, 2, \ldots, n)$.

2. – Notazioni ed ipotesi.

Sia Ω un insieme aperto e limitato di R^n $(n\geqslant 2)$, dotato di frontiera $\partial\Omega$ rappresentabile localmente come grafico di una funzione di classe C^1. Siano $a_{ij}\in C^0(\bar\Omega)$ $(i, j=1, 2, \ldots, n)$, $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)t_it_j\geqslant \nu|t|^2$ in $\bar\Omega$ per ogni $t\in R^n$, con ν costante positiva; b_i, d_i, $c\in L_\infty(\Omega)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$. Sia $2\leqslant p<+\infty$, $f_i\in L_p(\Omega)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, $\psi\in H^{1,p}(\Omega)$, $\psi\leqslant 0$ su $\partial\Omega$. Sia $a(\cdot,\cdot)$ la forma bilineare su $H_0^{1,p}(\Omega)\times H_0^{1,p}(\Omega)$ definita dalla (2). Per ogni $x\in R^n$ e ogni $\delta>0$ poniamo

$$S(x,\delta)=\{y\in R^n\colon |y-x|<\delta\}\,.$$

3. – Risultato.

TEOREMA. – *Nelle ipotesi suddette, se u è (una) soluzione del problema* (1), *allora u appartiene ad $H^{1,p}(\Omega)$ e risulta*

$$(3)\qquad \|u\|_{H^{1,p}}\leqslant C_1\Big[\|\psi\|_{H^{1,p}(\Omega)}+\sum_1^n\|f_i\|_{L_p(\Omega)}+\|u\|_{L_2(\Omega)}\Big]$$

essendo C_1 una costante dipendente da n, p, Ω, e dai coefficienti della forma bilineare $a(\cdot,\cdot)$.

DIMOSTRAZIONE. – 1ª *Parte.* Supponiamo in un primo tempo le seguenti ipotesi aggiuntive, che in seguito saranno rimosse: la frontiera $\partial\Omega$ sia rappresentabile localmente come grafico di una funzione di classe C^2, e sia $b_i\equiv d_i\equiv c\equiv f_i\equiv 0$ in Ω $(i=1, 2, \ldots, n)$.

Siano α_{ij} costanti reali $(i, j=1, 2, \ldots, n)$ tali che

$$\sum_1^n\alpha_{ij}t_it_j\geqslant\nu|t|^2\,,\qquad \forall t\in R^n\,.$$

Posto

$$\alpha(u, v) = \int_\Omega \sum_1^n \alpha_{ij} u_{x_i} v_{x_j}\, dx \tag{4}$$

si considera, al variare del parametro reale positivo η, il problema al contorno

$$\begin{cases} \alpha(w_\eta, v) + \eta^{-1}\int_\Omega \min(w_\eta - \psi, 0) v\, dx = 0\,, & \forall v \in H_0^1(\Omega)\,, \\ w_\eta \in H_0^1(\Omega)\,. \end{cases} \tag{5}$$

È facile provare ([10], [6]) che tale problema ammette una ed una sola soluzione w_η, la quale per noti teoremi (vedi ad esempio [1]) appartiene a $C^1(\bar\Omega)$. Rileggendo la dimostrazione di [5], si può osservare che se $\psi \in H^{1,\infty}(\Omega)$ vale una maggiorazione del tipo

$$\|w_\eta\|_{H^{1,\infty}(\Omega)} \leq C_2 \|\psi\|_{H^{1,\infty}(\Omega)} \tag{6}$$

ove la costante C_2 dipende solo da n, ν, Ω e non dipende da η.

D'altra parte dalla (5) è immediato ottenere

$$\|w_\eta\|_{H^1(\Omega)} \leq C_3 \|\psi\|_{H^1(\Omega)} \tag{7}$$

ove la costante C_3 dipende solo da ν. Procedendo per interpolazione come in [2], dalle (6), (7) si ottiene, per ogni p con $2 \leq p \leq +\infty$:

$$\|w_\eta\|_{H^{1,p}(\Omega)} \leq C_4 \|\psi\|_{H^{1,p}(\Omega)} \tag{8}$$

in cui la costante C_4 dipende dagli stessi argomenti di C_2 e non dipende da η.

Fissato ora un numero positivo arbitrario ε, si considerino un numero finito di punti $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ in $\bar\Omega$ ed un numero positivo $\varrho = \varrho(\varepsilon)$ tali che

$$\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}(x) - a_{ij}(x_l)| < \varepsilon\,, \qquad \forall x \in \overline{S(x_l, 2\varrho) \cap \Omega}\,, \tag{9}$$

$$\bar\Omega \subset \bigcup_{l=1}^k S(x_l, \varrho)\,. \tag{10}$$

Per ogni $l = 1, 2, \dots, k$ siano poi $\varphi_l \in C_0^\infty(S(x_l, 2\varrho))$ funzioni tali che $\varphi_l = 1$ in $S(x_l, \varrho)$.

Per ogni $\eta > 0$ sia u_η la soluzione del problema al contorno

$$(11) \qquad \begin{cases} a(u_\eta, v) + \eta^{-1}\int_\Omega \min(u_\eta - \psi, 0) v\, dx = 0\,, & \forall v \in H_0^1(\Omega)\,, \\ u_\eta \in H_0^1(\Omega)\,. \end{cases}$$

Tale u_η esiste ed è unica (vedi ancora [10], [6]); vogliamo provare una disuguaglianza a priori del tipo

$$(12) \qquad \|u_\eta\|_{H^{1,p}(\Omega)} \leqslant C_5 \|\psi\|_{H^{1,p}(\Omega)}$$

ove C_5 è una costante indipendente da η e dipendente da ν, p, n, Ω e dai coefficienti a_{ij} $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$. Dalla (12) segue la (3), poichè per η che tende a zero la soluzione u_η converge ad u in $H_0^1(\Omega)$, ove u è la soluzione del problema (1) (vedi [6]). La (12) si proverà per induzione nel modo seguente. Dato q con $2 \leqslant q < p$ si dimostrerà che dalla disuguaglianza (supposta valida)

$$(13) \qquad \|u_\eta\|_{H^{1,q}(\Omega)} \leqslant C_6 \|\psi\|_{H^{1,q}(\Omega)}$$

segue la

$$(14) \qquad \|u_\eta\|_{H^{1,q^*}(\Omega)} \leqslant C_7 \|\psi\|_{H^{1,q^*}(\Omega)}$$

ove le costanti C_6, C_7 dipendono dai soliti argomenti e non dipendono da η, e $q^* = \min\{p, qn/(n-q)\}$ se $q < n$, $q^* = p$ se $q \geqslant n$. Dal fatto che la (13) implica la (14) segue la (12), perchè la (13) è certamente valida per $q = 2$ (come si può facilmente verificare attraverso la (11)). Pertanto la (13) vale pure per $q = \min\{p, 2n/(n-2)\}$; se $p > 2n/(n-2)$ si ripete lo stesso ragionamento fino a dedurre la (12).

Supponiamo quindi verificata la (13) e deduciamone la (14). Tenuto conto delle (11), per ogni $l = 1, 2, \ldots, k$ risulta

$$(15) \qquad a(\varphi_l u_\eta, v) + \eta^{-1}\int_\Omega \min(\varphi_l u_\eta - \varphi_l \psi, 0) v\, dx =$$

$$= \int_\Omega \sum_{i,j} \{a_{ij}(u_\eta)_{x_i}(\varphi_l v)_{x_j} + a_{ij}(\varphi_l)_{x_i} u_\eta v_{x_j} - a_{ij}(u_\eta)_{x_i}(\varphi_l)_{x_j} v\}\, dx +$$

$$+ \eta^{-1}\int_\Omega \min(u_\eta - \psi, 0)\varphi_l v\, dx =$$

$$= \int_\Omega \sum_{i,j} \{a_{ij}(\varphi_l)_{x_i} u_\eta v_{x_j} - a_{ij}(u_\eta)_{x_i}(\varphi_l)_{x_j} v\}\, dx\,, \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

dove, come si è detto, $\varphi_l \in C_0^\infty(S(x_l, 2\varrho))$, $\varphi_l \equiv 1$ in $S(x_l, \varrho)$.

Soffermiamoci a considerare l'ultimo membro della (15). Non è restrittivo supporre che la funzione u_η sia definita fuori di Ω, ponendola ivi uguale a zero. Sia z la soluzione del problema di Dirichlet

$$(16) \qquad \begin{cases} \Delta z = \sum_{i,j} a_{ij}(\varphi_l)_{x_i}(u_\eta)_{x_j} & \text{in } S(x_l, 2\varrho) \\ z \in H_0^1(S(x_l, 2\varrho)) \end{cases}$$

(z dipende da η e da l; per semplicità non indichiamo tale dipendenza). Per noti teoremi risulta $z \in H^{2,q}(S(x_l, 2\varrho))$ e

$$(17) \qquad \|z\|_{H^{2,q}(S(x_l,2\varrho))} \leqslant C_8 \|u_\eta\|_{H^{1,q}(\Omega)}$$

ove la costante C_8 dipende da q, ϱ, ν, a_{ij} e non dipende da η.

Per i teoremi di immersione di Sobolev dalla (17) segue

$$(18) \qquad \|z\|_{H^{1,\bar{q}}(S(x_l,2\varrho))} \leqslant C_9 \|u_\eta\|_{H^{1,q}(\Omega)}$$

ove $\bar{q} = qn/(n-q)$ se $q < n$, $\bar{q} =$ reale qualunque se $q = n$, $\bar{q} = +\infty$ se $q > n$. Osserviamo ora che dalla (11) e dal teorema 4.2 di [10] si deduce una disuguaglianza del tipo

$$(19) \qquad \|u_\eta\|_{L^{\bar{p}}(\Omega)} \leqslant C_{10} \|\psi\|_{H^{1,q}(\Omega)}$$

con $\bar{p} = pn/(n-p)$ se $p < n$, $\bar{p} =$ reale qualunque se $p = n$, $\bar{p} = +\infty$ se $p > n$. Rileggendo accuratamente la dimostrazione del suddetto teorema, si verifica che la costante C_{10} nella (19) non dipende da η (nè da Ω). Posto dunque

$$g_i = z_{x_i} + \sum_j a_{ij}(\varphi_l)_{x_j} u_\eta \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

dalle (13), (18), (19) segue

$$(20) \qquad \|g_i\|_{L^{q^*}(\Omega)} \leqslant C_{11} \|\psi\|_{H^{1,q}(\Omega)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

ove la costante C_{11} dipende dai soliti argomenti e non dipende da η (si osservi che $q^* \leqslant \min\{\bar{p}, \bar{q}\}$). La (15) si può riscrivere

$$(21) \qquad a(\varphi_l u_\eta, v) + \eta^{-1} \int_\Omega \min(\varphi_l u_\eta - \varphi_l \psi, 0) v \, dx = \int_\Omega \sum_i g_i v_{x_i} \, dx .$$

Consideriamo ora la forma bilineare a coefficienti costanti così definita:

$$a_l(u, v) = \int_\Omega \sum_{i,j} a_{ij}(x_l)\, u_{x_i} v_{x_j}\, dx \qquad (l = 1, 2, \ldots, k)\,.$$

Dalla (21) segue

$$(22) \qquad a_l(\varphi_l u_\eta, v) + \eta^{-1}\int_\Omega \min(\varphi_l u_\eta - \varphi_l \psi, 0) v\, dx =$$

$$= \int_\Omega \sum_i g_i v_{x_i}\, dx + \int_\Omega \sum_{i,j} [a_{ij}(x_l) - a_{ij}(x)](\varphi_l u_\eta)_{x_i} v_{x_j}\, dx$$

per ogni $v \in H_0^1(\Omega)$. Sia h la soluzione del problema di Dirichlet

$$\begin{cases} a_l(h, v) = \int_\Omega \sum_i g_i v_{x_i}\, dx + \int_\Omega \sum_{i,j} [a_{ij}(x_l) - a_{ij}(x)](\varphi_l u_\eta)_{x_i} v_{x_j}\, dx\,, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \forall v \in H_0^1(\Omega)\,, \\ h \in H_0^1(\Omega)\,. \end{cases}$$

Per i risultati di [9] (teorema 1.6, pag. 17) esiste una costante C_{12}, dipendente da ν, Ω, n, p ma indipendente da ϱ e da η, tale che

$$(23) \qquad \|h\|_{H^{1,q^*}(\Omega)} \leqslant C_{12} \sum_i \|g_i - \sum_j [a_{ij}(x_l) - a_{ij}(x)](\varphi_l u_\eta)_{x_j}\|_{L_{q^*}(\Omega)}$$

e tenendo conto delle (9), (20) dalla (23) si deduce

$$(24) \qquad \|h\|_{H^{1,q^*}(\Omega)} \leqslant C_{13}\|\psi\|_{H^{1,q}(\Omega)} + C_{12}\varepsilon\|(\varphi_l u_\eta)_x\|_{L_{q^*}(\Omega)}$$

con la costante C_{13} indipendente da η. Allora la (22) si può riscrivere

$$(25) \qquad a_l(\varphi_l u_\eta - h, v) + \int_\Omega \eta^{-1} \min(\varphi_l u_\eta - \varphi_l \psi, 0) v\, dx = 0$$

per ogni $v \in H_0^1(\Omega)$. La (25) è un'equazione a coefficienti costanti come la (5); la funzione ostacolo è ora $\varphi_l \psi - h$ al posto di ψ; pertanto la (8) diventa (con q^* al posto di p):

$$(26) \qquad \|\varphi_l u_\eta\|_{H^{1,q^*}(\Omega)} \leqslant C_{14}\|\varphi_l \psi - h\|_{H^{1,q^*}(\Omega)}$$

e per la (24)

$$(27) \qquad \|\varphi_l u_\eta\|_{H^{1,q^*}(\Omega)} \leqslant C_{15}\|\psi\|_{H^{1,q^*}(\Omega)} + C_{12}C_{14}\varepsilon\|\varphi_l u_\eta\|_{H^{1,q^*}(\Omega)}\,.$$

Le costanti C_{12} e C_{14} non dipendono da η nè da ϱ (e quindi neppure da ε) e C_{15} non dipende da η. Si può allora scegliere ε in modo che $C_{12}C_{14}\varepsilon < 1$, ottenendo dalla (27)

$$\|\varphi_l u_\eta\|_{H^{1,q^*}(\Omega)} \leqslant C_{16}\|\psi\|_{H^{1,q^*}(\Omega)} \tag{28}$$

con la costante C_{16} indipendente da η. La (28) vale per ogni $l = 1, 2, \dots, k$; per la (10) e la scelta delle funzioni φ_l $(\equiv 1$ in $S(x_l, \varrho))$, dalla (28) segue la (14) e quindi la (12). Tutte le costanti considerate non dipendono da η e pertanto, come si è già detto, dalla (12) si ottiene la (3) facendo tendere η a zero.

Si è così provata la tesi nelle ipotesi aggiuntive: $\partial\Omega$ di classe C^2, $b_i \equiv d_i \equiv c \equiv f_i \equiv 0$ in Ω $(i = 1, 2, \dots, n)$.

2ª *Parte*. – Procediamo ora ad eliminare l'ipotesi provvisoria che $\partial\Omega$ sia di classe C^2. Tale ipotesi è servita solamente a provare la (6) ed in conseguenza la (8) e la (26): basterà dunque dimostrare queste quando $\partial\Omega$ è solo di classe C^1. Si osserva che il supporto di $\varphi_l u$ è contenuto in $\overline{\Omega \cap S(x_l, 2\varrho)}$, pertanto l'equazione (25) si può pensare in tale insieme anzichè in Ω.

Non è restrittivo scegliere le sfere $S(x_1, \varrho), \dots, S(x_k, \varrho)$, la cui unione ricopre $\overline{\Omega}$, in modo che per ogni $l = 1, 2, \dots, k$ risulti o $\overline{S(x_l, \varrho)} \subset \Omega$ oppure $x_l \in \partial\Omega$. Nel primo caso è chiaro che si può applicare la (6) con una costante indipendente dalla regolarità di $\partial\Omega$. Nel secondo caso, scegliendo ϱ abbastanza piccolo, si può trasformare, con un opportuno cambiamento di variabili, l'aperto $S(x_l, 2\varrho) \cap \Omega$ in un aperto U contenuto in $\{y \in R^n\colon y_n < 0\}$ e il compatto $\overline{\partial\Omega \cap S(x, 2\varrho)}$ in un sottoinsieme di $\{y \in R^n\colon y_n = 0\}$. (Per brevità omettiamo i dettagli rinviando, per una situazione simile, ad esempio a [3]). La funzione $\varphi_l u_\eta$ si trasforma, per il suddetto cambiamento di variabili, in una funzione $\overline{u} \in H_0^1(U)$. Poichè $\overline{u} = 0$ in un intorno di $\partial U \setminus \{y \in R^n\colon y_n = 0\}$, ne segue che esiste un aperto W contenuto in U, con frontiera ∂W di classe C^∞, tale che $\overline{u} \in H_0^1(W)$. La funzione $\overline{u}$ soddisfa in W ad un'equazione come la (11), a coefficienti continui (confronta la (6) di [3]). Pertanto, per la parte già provata del teorema, vale per $\overline{u}$ una maggiorazione come la (12), essendo ∂W regolare. Applicando il cambiamento di variabili inverso del precedente e noti teoremi sugli spazi di Sobolev (vedi ad esempio [8], cap. 3) si perviene alla (26).

Il resto della dimostrazione procede allo stesso modo che in precedenza.

3ª *Parte*. – Togliamo ora l'ipotesi che $f_i \equiv 0$ in Ω, supponendo ancora tuttavia che $b_i \equiv d_i \equiv c \equiv 0$ in Ω $(i = 1, 2, \dots, n)$.

Si procede come in [2], considerando la soluzione $\tilde{\varphi}$ del problema di Dirichlet

$$(29) \qquad \begin{cases} a(\tilde{\varphi}, v) = \int_\Omega \sum_i f_i v_{x_i}\, dx\,, & \forall v \in H_0^1(\Omega)\,, \\ \tilde{\varphi} \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

e il convesso

$$\tilde{K} = \{v \in H_0^1(\Omega) : v \geqslant \psi - \tilde{\varphi} \text{ q.o. in } \Omega\}\,.$$

Allora, come subito si verifica, la funzione $u - \tilde{\varphi}$ soddisfa la disequazione variazionale

$$(30) \qquad \begin{cases} a(u - \tilde{\varphi}, v - u + \tilde{\varphi}) \geqslant 0\,, & \forall v \in \tilde{K}\,, \\ u - \tilde{\varphi} \in \tilde{K}\,. \end{cases}$$

Ma $\tilde{\varphi} \in H^{1,p}(\Omega)$ (per [9], teorema 1.6), quindi il nuovo ostacolo $\psi - \tilde{\varphi}$ appartiene ancora ad $H^{1,p}(\Omega)$. Per quanto già dimostrato, si può quindi pervenire facilmente alla tesi.

4ª *Parte*. – Resta infine da togliere l'ipotesi che $b_i \equiv d_i \equiv c \equiv 0$ in Ω. La disequazione data si può scrivere

$$(31) \qquad \int_\Omega \sum_{i,j} a_{ij} u_{x_i} (v - u)_{x_j}\, dx \geqslant$$
$$\geqslant \int_\Omega \Big\{ \sum_i (f_i - d_i u)(v - u)_{x_i} - \Big(\sum_i b_i u_{x_i} + cu \Big)(v - u) \Big\}\, dx$$

per ogni $v \in K$. Si procede ora in modo simile a quanto fatto nella prima parte. Supponiamo cioè che $2 \leqslant q < p$ e che sia valida una disuguaglianza del tipo

$$(32) \qquad \|u\|_{H^{1,q}(\Omega)} \leqslant C_{17} \Big[\|\psi\|_{H^{1,q}(\Omega)} + \sum_i \|f_i\|_{L_p(\Omega)} + \|u\|_{L_2(\Omega)} \Big]$$

(essendo u la soluzione del problema (1)). Dalla (32) deduciamo che

$$(33) \qquad \|u\|_{H^{2,q^*}(\Omega)} \leqslant C_{18} \Big[\|\psi\|_{H^{1,q^*}(\Omega)} + \sum_i \|f_i\|_{L_p(\Omega)} + \|u\|_{L_2(\Omega)} \Big]$$

ove q^* è definito come in precedenza. Il fatto che la (32) implica la (33) dimostra la tesi (3): basta ragionare nello stesso modo in cui si è dedotta la (12).

Supponiamo dunque verificata la (32) e deduciamone la (33). Per semplicità ci limitiamo al caso $q < n$. Poichè $u \in H^{1,q}(\Omega)$, per i teoremi di immersione di Sobolev è pure $u \in L_{qn/(n-q)}(\Omega)$ e quindi $u \in L_{q^*}(\Omega)$. Inoltre se $\tilde{z}$ è la soluzione del problema di Dirichlet

$$\left\{\begin{array}{ll} \Delta\tilde{z} = \sum\limits_i b_i u_{x_i} + cu & \text{in } \Omega, \\ \Delta\tilde{z} = 0 & \text{in } \Omega_1 \setminus \Omega, \\ \tilde{z} \in H_0^1(\Omega_1) & \end{array}\right. \tag{34}$$

(essendo Ω_1 un aperto limitato regolare contenente Ω), risulta $\tilde{z} \in H^{2,q}(\Omega_1)$ e

$$\|\tilde{z}\|_{H^{2,q}(\Omega)} \leqslant \|\tilde{z}\|_{H^{2,q}(\Omega_1)} \leqslant C_{19} \Big\| \sum_i b_i u_{x_i} + cu \Big\|_{L_q(\Omega)}. \tag{35}$$

Da questa, ancora per i teoremi di Sobolev

$$\|\tilde{z}\|_{H^{1,qn/(n-q)}(\Omega)} \leqslant C_{20} \Big\| \sum_i b_i u_{x_i} + cu \Big\|_{L_q(\Omega)}. \tag{36}$$

Allora per le (32), (34), (36), posto

$$\tilde{g}_i = f_i - d_i u + \tilde{z}_{x_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

risulta evidentemente

$$\|\tilde{g}_i\|_{L^{q^*}(\Omega)} \leqslant C_{21} \Big[\|\psi\|_{H^{1,q}(\Omega)} + \sum_i \|f_i\|_{L_p(\Omega)} + \|u\|_{L_2(\Omega)} \Big]. \tag{37}$$

Per la (31) si ha d'altra parte

$$\int_\Omega \sum_{i,j} a_{ij} u_{x_i} (v-u)_{x_j}\, dx \geqslant \int_\Omega \sum_i \tilde{g}_i (v-u)_{x_i}\, dx \tag{38}$$

per ogni $v \in K$, e quindi per quanto già provato

$$\|u\|_{H^{1,q^*}(\Omega)} \leqslant C_{22} \Big[\|\psi\|_{H^{1,q^*}(\Omega)} + \sum_i \|\tilde{g}_i\|_{L_{q^*}(\Omega)} \Big]. \tag{39}$$

Dalle (37) e (39) è immediato dedurre la tesi.

4. – Osservazioni.

OSSERVAZIONE 1. – Nei casi in cui si sa che la disequazione variazionale (1) ha una ed una sola soluzione, la tesi (3) è evidentemente ancora vera omettendo il termine $\|u\|_{L_2(\Omega)}$ al secondo membro. Ciò si verifica ad esempio se $c - \sum_i (d_i)_{x_i} \geq 0$ nel senso delle distribuzioni, o più in generale se il primo autovalore associato alla forma quadratica $a(\cdot,\cdot)$ è negativo: vedi [4].

OSSERVAZIONE 2. – L'ipotesi « $b_i, d_i, c \in L_\infty(\Omega)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ » si potrebbe ridurre assumendo soltanto che tali funzioni appartengano ad opportuni spazi di sommabilità.

OSSERVAZIONE 3. – Una certa regolarità dei coefficienti a_{ij} è necessaria per poter concludere che la soluzione sta in $H^{1,p}(\Omega)$.

Infatti in [7], pag. 204 è riportato l'esempio di un'equazione del tipo $a(u, v) = 0$ per ogni $v \in \mathring{H}^1_0(\Omega)$, con coefficienti a_{ij} discontinui nell'origine e soluzione u non appartenente ad $H^{1,p}(\Omega)$ (con $p > 2$ opportuno e Ω intorno dell'origine in R^2).

Poichè tale soluzione è non negativa in $\Omega_1 = \{(x, y) \in R^2 : x > 0\}$ e nulla su $\partial\Omega_1$, essa è pure soluzione della disequazione variazionale

$$a(u, v - u) \geq 0 , \qquad \forall v \in H^1_0(\Omega_1),\ v \geq 0 \text{ in } \Omega_1$$

cioè la (1) con $f_i \equiv \psi \equiv 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Pertanto questo stesso esempio serve a dimostrare la necessità della regolarità dei coefficienti nel caso delle disequazioni variazionali.

OSSERVAZIONE 4. – Anche una certa regolarità della frontiera di Ω è necessaria per concludere che la soluzione di (1) sta in $H^{1,p}(\Omega)$. In base alle considerazioni dell'osservazione precedente, basta fornire un controesempio relativo alle equazioni, purchè la soluzione sia non negativa. Tale controesempio si trova in [9] (pag. 96).

OSSERVAZIONE 5. – Esaminiamo infine la possibilità di estendere il risultato al caso $p = +\infty$. Se $f_i \equiv 0$ in Ω $(i = 1, 2, \ldots, n)$ e $\psi \in H^{1,\infty}(\Omega)$, è provato in [5] che la soluzione u appartiene ad $H^{1,\infty}(\Omega)$. Se invece le funzioni f_i sono non nulle ed appartengono ad $L_\infty(\Omega)$, non è detto che la soluzione u della disequazione variazionale (1) appartenga ad $H^{1,\infty}(\Omega)$. Ciò si vede col seguente esempio: sia $n = 2$, $u(x, y) = (y - x)(1 - \log \varrho)$, ove $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Si verifica facilmente che le derivate prime di u sono non limitate in $\Omega = \{(x, y): y - x > 0,\ x^2 + y^2 < e^2\}$, mentre $u \in H_0^1(\Omega)$ e posto

$$f_1(x, y) = 2x(x - y)\varrho^{-2}, \qquad f_2(x, y) = 2y(x - y)\varrho^{-2}$$

risulta

$$\iint_\Omega (u_x v_x + u_y v_y)\, dx\, dy = \iint_\Omega (f_1 v_x + f_2 v_y)\, dx\, dy$$

per ogni $v \in H_0^1(\Omega)$. La funzione u è non negativa in Ω, quindi questo esempio, in base alle considerazioni precedenti (osservazione 3), prova che il risultato del teorema 1 non si estende al caso $p = +\infty$.

In realtà in questo esempio l'insieme Ω non ha la frontiera di classe C^1, ma ci si può facilmente ricondurre a questo caso sostituendo ad u il prodotto αu, ove α è una funzione di classe $C_0^\infty(R^2)$, uguale ad 1 in un intorno di (0, 0) ed avente il supporto contenuto nel cerchio $\{(x, y) \in R^2: x^2 + y^2 < e^2\}$.

Ringrazio il «referee» per le utili osservazioni fatte.

BIBLIOGRAFIA

[1] S. Agmon - A. Douglis - L. Nirenberg, *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions, I*, Comm. Pure Appl. Math., **12** (1959), 623-727.

[2] L. Boccardo, *Regularité $W_0^{1,p}(\Omega)$ $(2 < p < +\infty)$ de la solution d'un problème unilateral*, Ann. Fac. Sci. Toulouse, (5) **3** (1981), 69-74.

[3] M. Chicco, *Principio di massimo forte per soluzioni di problemi al contorno misti per equazioni ellittiche di tipo variazionale*, Boll. Un. Mat. Ital., (4) **11**, suppl. fasc. 3 (1975), 100-109.

[4] M. Chicco, *Esistenza ed unicità della soluzione di una disequazione variazionale associata ad un operatore ellittico del secondo ordine a coefficienti discontinui*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **57** (1977), 17-37.

[5] M. Chipot, *Sur la régularité lipschitzienne de la solution d'inéquations elliptiques*, J. Math. Pures Appl., **57** (1978), 69-76.

[6] J. L. Lions, *Quelques méthodes de résolutions des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, Paris, 1969.

[7] N. G. MEYERS, *An estimate for the gradient of solutions of second order elliptic equations*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, (3) **17** (1963), 189-206.
[8] J. NEČAS, *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Masson et Cie, Academia, 1967.
[9] C. G. SIMADER, *On Dirichlet's boundary value problem*, Lecture Notes in Mathematics, Springer, vol. **268** (1972).
[10] G. STAMPACCHIA, *Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **15** 1 (1965), 189-258.

Istituto Matematico, Università di Genova

Pervenuta alla Segreteria dell' U. M. I. il 28 agosto 1982