Raccolta esami di Analisi II

(Corsi di laurea in Ing. Edile-Architettura e Civile-Ambientale)

Esame del 18 gennaio 2011

Esercizio 1. Dato il solido

$$V = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 4,\ \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq x^2 + y^2\}$$

a) disegnare l'intersezione di V con il piano di equazione $x = 0$.

b) Supposto V omogeneo, determinare il baricentro di V.

c) Applicando il teorema della divergenza, determinare il flusso del campo $F(x, y, z) = (xz,\ z,\ z^2)$ uscente dalla supericie S contorno di V.

Esercizio 2. Dato il sistema differenziale

$$\begin{cases} y_1'(x) = -y_2(x) + 1 \\ y_2'(x) = y_1(x) + 3\sin(2x) \end{cases}$$

a) calcolare due soluzioni linearmente indipendenti del sistema omogeneo associato;

b) calcolare l'integrale generale del sistema dato.

Esercizio 3. Dato il campo vettoriale

$$F(x, y) = \left(\frac{3x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + y,\ \frac{ky}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 2\,e^{2y} + x \right)$$

a) determinare l'insieme di definizione I di F e specificare se I è semplicemente connesso.

b) Determinare per quali valori del parametro reale k il campo F è conservativo in I e, per tali valori, trovare un potenziale di F.

c) Data la curva parametrica C con parametrizzazione $r(t) = (\cos t,\ \sin t)$ con $t \in [0, \pi/2]$, calcolare, se esiste, $\int_C F$.

Esame dell' 8 febbraio 2011

Esercizio 1. Calcolare la coordinata z del baricentro del solido (supposto omogeneo) limitato dalle superfici di equazioni: $x^2 + y^2 = 1,\ z = 0,\ z = 2 + |xy|$.

Esercizio 2. Data l'equazione differenziale

$$x^2\, y''(x) - x\, y'(x) - 8\, y(x) = x^3$$

a) determinarne tutte le soluzioni in $(0, +\infty)$;

b) determinare le eventuali soluzioni tali che $y(1) = 1,\ y'(1) = 2/5$.

Esercizio 3. Dato il campo vettoriale

$$F(x, y) = \left(\frac{y}{x^2 + y^2} - \frac{1}{x + 2},\ \frac{-x}{x^2 + y^2} + 1 \right)$$

a) determinare l'insieme di definizione I di F e specificare se I è semplicemente connesso.

b) Verificare se il campo F è conservativo in I.

c) Se esiste, trovare un potenziale di F nell'insieme $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1\}$.
d) Data la curva parametrica C con parametrizzazione $r(t) = (3 + \cos t,\, 3\sin t)$ con $t \in [0, \pi/2]$, è vero che $\int_C F = 0$?

Esame del 16 giugno 2011

Esercizio 1. Dato il sistema differenziale

$$\begin{cases} y_1'(x) = y_1(x) - y_2(x) + x\, e^x \\ y_2'(x) = y_2(x) + \cos x \end{cases}$$

a) determinare due soluzioni linearmente indipendenti del sistema omogeneo associato;
b) determinare l'integrale generale del sistema dato.

Esercizio 2. Sia data la funzione

$$f(x,y) := x^2 + x\,y + 2\,y^2 + |y|$$

a) Stabilire se la funzione ammette minimi e/o massimi globali nel suo dominio.
b) Determinare, se esistono, i punti di minimo e di massimo globali della funzione in $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \le 0,\, -x \le y \le 1\}$.
c) Calcolare, se esiste, la derivata direzionale minima della funzione in $(0,0)$.

Esercizio 3. Calcolare il volume del solido

$$T := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \le 0,\, x^2 + y^2 + z^2 \le 4,\, x^2 + y^2 \le 1,\, 4(x^2 + y^2) \le (2 - z)^2\}.$$

Esame del 12 luglio 2011

Esercizio 1. Dato il solido

$$V := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le 4,\, 1 + \sqrt{x^2 + y^2} \le z \le 4 + x^2 + y^2\},$$

a) calcolare

$$\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2}\, dx\, dy\, dz$$

b) Parametrizzare la superficie S contorno di V.
c) Calcolare l'area della superficie Ω tale che $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le 4,\, z = 4 + x^2 + y^2\}$.
d) Applicando il teorema della divergenza, determinare il flusso del campo $F(x,y,z) = \left(y, x, z\sqrt{x^2 + y^2}\right)$ uscente dalla superficie S contorno di V.

Esercizio 2. Data l'equazione differenziale

$$x^2\, y''(x) + x\, y'(x) + 4\, y(x) = -\log x$$

a) determinare due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea associata;
b) determinare l'integrale generale dell'equazione data, precisandone l'insieme di definizione.

Esercizio 3. Dato il campo vettoriale

$$F(x,y) = \left(\frac{y}{1 + x^2 y^2} + \frac{2\,x\,y}{1 + x^2 y},\ \frac{x}{1 + x^2 y^2} + \frac{x^2}{1 + x^2 y} \right)$$

a) trovare l'insieme di definizione I di F e specificare se I è semplicemente connesso.

b) Verificare se F è conservativo in I e, se esiste, trovare un potenziale di F.

c) Data la curva γ con parametrizzazione $r(t) = (e^{-t} \cos t,\, e^{-t} \sin t)$ con $t \in [0, \pi]$, verificare se tale curva è regolare e, se esiste, calcolare $\displaystyle\int_\gamma F$.

Esame del 13 settembre 2011

Esercizio 1. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{y(x)}{2(x+1)} - \dfrac{x+2}{2\,y(x)} \\ y(0) = k \end{cases}$$

a) stabilire di che tipo è l'equazione differenziale;

b) stabilire per quali valori del parametro reale k (se ce ne sono) il problema ha una ed una sola soluzione in un intorno del punto iniziale;

c) determinare la soluzione o le soluzioni del problema (se possibile) per $k = -1$.

Esercizio 2. Sia $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2,\, z \leq 3\}$.

a) Calcolare il volume di T.

b) Parametrizzare la superficie S contorno di T.

Esercizio 3. Dato il campo vettoriale

$$F(x, y) = \left(\frac{2\,x + y}{2\sqrt{x^2 + x\,y}} + \frac{y\,e^{\arctan xy}}{1 + x^2y^2},\, \frac{x}{2\sqrt{x^2 + x\,y}} + \frac{x\,e^{\arctan xy}}{1 + x^2y^2} \right)$$

a) trovare l'insieme di definizione I di F e specificare se è connesso e se è semplicemente connesso.

b) Verificare se F risulta conservativo in I e, se esiste, trovare un potenziale di F.

c) Data la curva γ con parametrizzazione $r(t) = (2 + \cos t,\, \sin t)$ con $t \in [\pi, 2\pi]$, verificare se tale curva è regolare e, se esiste, calcolare $\displaystyle\int_\gamma F$.

Esame del 12 gennaio 2012

Esercizio 1. Sia T la figura nel piano (x, z) limitata dalle diseguaglianze

$$x^2 + (z-1)^2 - 1 \geq 0,\; x + z - 2 \leq 0,\; z \geq 0,\; x \geq 0$$

a) Calcolare le coordinate del baricentro del solido D (supposto omogeneo) ottenuto dalla rotazione completa di T attorno all'asse z.

b) Applicando il teorema della divergenza, calcolare il flusso del campo vettoriale $F(x, y, z) = (y, 2y, 3z)$ uscente dalla superficie S frontiera del solido D.

Esercizio 2. Dato il campo vettoriale

$$F(x, y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}} + 4\,x\,e^{x^2},\, \frac{a\,y}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}} + \frac{2\,y}{1 + y^2} \right)$$

a) determinare i valori del parametro reale a in modo che F risulti conservativo nel suo insieme di definizione I.

b) Se esiste, al variare di $a \in \mathbb{R}$, trovare un potenziale di F in I.

c) Calcolare, se esiste, $\int_C F$, dove C è la curva di rappresentazione parametrica $r(t) = (2\,\cos t,\ 3\,\sin t)$ con $t \in [\pi,\ 3\pi/2]$.

Esercizio 3. Data l'equazione differenziale

$$x^2\,y''(x) + 4\,x\,y'(x) + 2\,y(x) = x^2$$

trovarne tutte le soluzioni tali che $y(1) = 0$.

Esame dell'8 febbraio 2012

Esercizio 1. Dato il solido

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \le 9,\ z \ge \sqrt{x^2 + y^2},\ z \ge 1\}$$

a) calcolare

$$\iiint_V z\,dx\,dy\,dz$$

b) Parametrizzare la superficie S contorno di V.

Esercizio 2. Dato il campo vettoriale

$$F(x, y) = \left(2\,x\,\ln(x - y) + \frac{x^2}{x - y},\ \frac{-\,x^2}{x - y} + \cos y - y\,\sin y\right)$$

a) disegnare l'insieme di definizione I di F e specificare se I è semplicemente connesso.

b) Verificare se F risulta conservativo in I e, se esiste, trovare un potenziale di F.

c) Se esistono, calcolare $\int_{\gamma_1} F$ e $\int_{\gamma_2} F$, dove γ_1 è la curva con parametrizzazione $r(t) = (2\,\cos t, 2\sin t)$ con $t \in [0,\ 2\,\pi]$ e γ_2 è la curva con parametrizzazione $r(t) = (t,\ -1 + t^2/2)$ con $t \in [0,\ 1]$.

Esercizio 3. Dato il sistema differenziale

$$\begin{cases} y_1'(x) = 2\,y_1(x) + 2\,y_2(x) + 5\,\sin x \\ y_2'(x) = y_1(x) + y_2(x) - e^{3x} \end{cases}$$

a) determinare, se esistono, due soluzioni linearmente indipendenti del sistema omogeneo associato;

b) determinare una soluzione particolare del sistema completo.

Esame del 13 giugno 2012

Esercizio 1. Sia $V = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \le 4,\ \sqrt{x^2 + y^2} \le z \le x^2 + y^2 + 2\}$.

a) Supposto V omogeneo, determinarne il baricentro.

b) Parametrizzare la superficie S frontiera di V.

c) Determinare la normale esterna alla superficie $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le 4,\ z = x^2 + y^2 + 2\}$.

Esercizio 2. Dato il sistema differenziale

$$\begin{cases} y_1'(x) = y_1(x) + 5\,y_2(x) - 4\,x \\ y_2'(x) = -y_1(x) - y_2(x) \end{cases}$$

a) determinare due soluzioni linearmente indipendenti del sistema omogeneo associato;

b) determinare una soluzione particolare del sistema completo.

c) Esistono soluzioni limitate del sistema dato? E soluzioni periodiche?

Esercizio 3. Dato il campo vettoriale

$$F(x,y,z) = \left(2\,x\,z - \frac{1}{(x-y)^2},\ \frac{1}{(x-y)^2} - e^{\sin z},\ x^2 - y\,\cos z\, e^{\sin z}\right)$$

a) trovare l'insieme di definizione I di F e specificare se I è semplicemente connesso.

b) Verificare se F è xonservativo in I e, se esiste, trovare un potenziale di F in I.

c) Data la curva γ di rappresentazione parametrica $r(t) = (0,\, t,\, t^2 - 1)$ con $t \in [1,\, 2]$, verificare se γ è una curva regolare, se appartiene a I e, se esiste, calcolare $\displaystyle\int_\gamma F$.

Esame del 6 luglio 2012

Esercizio 1. Dato il solido

$$T := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y \geq 0,\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 4,\ 3(x^2+y^2) \leq (z+2)^2\}$$

calcolarne il volume.

Esercizio 2. Data l'equazione

$$x^2\,y''(x) + 6\,x\,y'(x) + 6\,y(x) = f(x)$$

a) determinarne tutte le soluzioni in $(-\infty,\, 0)$ se $f(x) = 0$.

b) Determinarne tutte le soluzioni in $(-\infty,\, 0)$ se $f(x) = x + \dfrac{2}{x^2}$.

Esercizio 3. Dato il campo vettoriale

$$F(x,y) = \left(e^x + \frac{y\,e^{\arctan xy}}{1+x^2y^2} - \frac{1}{x+y+1},\ y^2 + \frac{x\,e^{\arctan xy}}{1+x^2y^2} - \frac{1}{x+y+1}\right)$$

a) rappresentare l'insieme di definizione I di F e specificare se I è semplicemente connesso.

b) Verificare se F è xonservativo in I e, se esiste, trovare un potenziale di F in I.

c) Data la curva γ di rappresentazione parametrica $r(t) = (t\,\cos t,\, t\,\sin t)$ con $t \in [0,\, \pi/2]$, verificare se γ è una curva regolare, se la sua traccia è contenuta in I e, se esiste calcolare $\displaystyle\int_\gamma F$.

Esame del 6 settembre 2012

Esercizio 1. Dato il sistema differenziale

$$\begin{cases} y_1'(x) = -y_1(x) - y_2(x) + 5\,\sin x \\ y_2'(x) = y_1(x) - y_2(x) - 2\,x \end{cases}$$

a) determinare due soluzioni linearmente indipendenti del sistema omogeneo associato;

b) determinare una soluzione particolare del sistema completo.

c) stabilire se esistono soluzioni del sistema limitate in $\mathbb{R}$ ed in caso affermativo quante.

Esercizio 2. Sia $T := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - 2\,x \leq z \leq 0,\ \max\{|x|,\, |y|\} \geq k\}$.

a) Per quali valori del parametro reale k (se ce ne sono) l'insieme T è vuoto?

b) Sia ora $k = 1$; calcolare il volume di T.

Esercizio 3. Dato il campo vettoriale

$$F(x,y) = \left(\frac{x-2}{\sqrt{x^2+y^2-4\,x+3}} - \frac{1}{\sqrt{x}},\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2-4\,x+3}} + \frac{1}{1+y^2}\right)$$

a) rappresentare l'insieme di definizione I di F e specificare se I è semplicemente connesso.

b) Verificare se F è conservativo in I e, se esiste, trovare un potenziale di F in I.

c) Data la curva γ di rappresentazione parametrica $r(t) = (2 + 2\cos t,\, 2\sin t)$ con $t \in [0, \pi/2]$, calcolare, se esiste, $\displaystyle\int_\gamma F$.

Esame del 15 gennaio 2013

Esercizio 1A. Dato il campo vettoriale

$$F(x,y) = \Big(\frac{4x}{\sqrt{4x^2+y^2-4}} - e^{-x}\,,\ \frac{y}{\sqrt{4x^2+y^2-4}}\Big)$$

1) Rappresentare l'insieme di definizione I di F e specificare se è semplicemente connesso.

2) Verificare se F è conservativo in I e, se esiste, trovare un potenziale di F in I.

3) Data la curva γ di rappresentazione parametrica $r(t) = (t, t+3)$, con $t \in [-3, 0]$, calcolare, se esiste, $\int_\gamma F$.

Esercizio 1B. Dato il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} y_1'(x) = 2y_1(x) + y_2(x) \\ y_2'(x) = 2y_1(x) + y_2(x) \end{cases}$$

a) Determinare due soluzioni linermente indipendenti e l'integrale generale del sistema.

c) Determinare, se esiste, la soluzione del sistema tale che $y_1(0) = 0,\ y_2(0) = 1$.

Esercizio 2. Si consideri il seguente dominio nel piano xz:

$$A = \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 : z \le x,\ (x-1)^2 + z^2 \le 1,\ x^2 + (z+1)^2 \ge 1\}$$

1) Stabilire se esistono il massimo ed il minimo assoluto della funzione $f(x,z) = x + |z|$ ristretta alla frontiera di A. In caso affermativo scrivere il sistema dei moltiplicatori di Lagrange per la ricerca di tali estremi assoluti.

2) Determinare una formula di riduzione in coordinate cartesiane ed in opportune coordinate polari per $\displaystyle\iint_A 1\, dxdz$, se esiste.

3) Sia V il solido ottenuto ruotando A di 2π attorno all'asse z. Calcolare il volume di V.

4) Sia ora S la superficie frontiera di V e sia $T = S \cap \{(x,y,z) : z \ge 0\}$. Dare una parametrizzazione per T.

5) Nel caso in cui esista, calcolare l'equazione del piano tangente a T nei punti $P_o = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$ e $P_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

Esame del 5 febbraio 2013

Esercizio 1A. Dato il campo vettoriale

$$F(x,y) = \Big(\frac{kxy}{1+x^2y} - ye^{-\sin x}\cos x,\ \frac{x^2}{1+x^2y} + e^{-\sin x} + 2\Big)$$

1) Rappresentare l'insieme di definizione I di F e specificare se è semplicemente connesso.

2) Determinare $k \in \mathbb{R}$ in modo che F sia conservativo in I e, se esiste, trovare un potenziale di F in I.

3) Data la curva γ di rappresentazione parametrica $r(\theta) = (\theta \sin\theta, \theta\cos\theta)$, con $\theta \in [0, \pi/2]$, verificare se la curva è regolare e calcolare, se esiste, $\int_\gamma F$.

Esercizio 1B. Dato il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} y_1'(x) = y_1(x) + 3y_2(x) + 2e^{-x} \\ y_2'(x) = 4y_1(x) + 2y_2(x) + e^{-x} \end{cases}$$

a) $Y(x) = \begin{pmatrix} e^x \\ 2e^x \end{pmatrix}$ può essere una soluzione del sistema omogeneo associato?
b) Determinare una soluzione particolare del sistema dato.

Esercizio 2A. Siano

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -2 \le z \le 2\,x\,y,\ x^2 + y^2 \le 1\} \ \text{ ed } \ S \ \text{ la frontiera di } V.$$

a) Calcolare l'area di S.
b) Determinare, se esiste, l'equazione del piano tangente ad S nei punti $P_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ e $P_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$.
c) Calcolare il flusso uscente da S del campo $\underline{F}(x, y, z) = (2x + y^3)\,\underline{i} + (y - x^3)\,\underline{j} + z\,\underline{k}$.

Esercizio 2B. Sia

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2\,x^4 + x^2\,y^2 + 2\,y^4 = 5\}.$$

a) Verificare che esistono punti di A di massima e minima distanza dall'origine delle coordinate.
b) Calcolare i punti di A di minima distanza dall'origine. (*Per semplificare i calcoli, si può considerare il quadrato della distanza, perché ......*)

Esame del 9 aprile 2013

Esercizio 1. Sia $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + \frac{(z-2)^2}{4} \le 1\} \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le 1 - \sqrt{x^2 + y^2}\}$.
1) Esprimere V come unione di domini normali e calcolarne il volume.
2) Calcolare il flusso uscente del campo vettoriale $F = (x, 2\,y, 0)$ attraverso la superficie S, essendo S la parte della frontiera di V tale che $\quad x^2 + y^2 + \frac{(z-2)^2}{4} = 1$.
3) Determinare, se esiste, l'equazione del piano tangente ad S nel punto $P_o = (\sqrt{\frac{3}{8}}, \sqrt{\frac{3}{8}}, 3)$.

Esercizio 2. Dato il campo vettoriale

$$F(x, y) = \left(\frac{x-2}{\sqrt{(x-2)^2 + y^2}}\ ,\ \frac{y}{\sqrt{(x-2)^2 + y^2}} + \cos y e^{\sin y}\right)$$

a) Trovare l'insieme di definizione di F e specificare se è semplicemente connesso.
b) Verificare se F risulta conservativo in I e, se esiste, trovare un potenziale di F.
c) Data la curva γ con equazione polare $\rho = 2\theta$ con $\theta \in [0, \pi]$, verificare se tale curva è regolare e, se esiste, calcolare $\int_\gamma F$.

Esame del 12 giugno 2013

Esercizio 1A. Dato il campo vettoriale

$$F(x, y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + 4y^2 - 1}} - \frac{x}{1 + x^2},\ \frac{4y}{\sqrt{x^2 + 4y^2 - 1}} + \frac{1}{1 + y^2}\right)$$

1) Rappresentare l'insieme di definizione I di F e specificare se è semplicemente connesso.
2) Verificare se F è conservativo in I e, in caso affermativo, trovare un potenziale di F in I.
3) Data la curva γ di rappresentazione parametrica $r(t) = (-3 + \cos t, \sin t)$, con $t \in [0, \pi]$, verificare se la curva è regolare e calcolare, se esiste, $\int_\gamma F$.

Esercizio 1B. Dato il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} y_1'(x) = -y_1(x) + 2y_2(x) \\ y_2'(x) = 2y_1(x) + 2y_2(x) \end{cases}$$

Trovarne tutte le soluzioni.

Esercizio 2. Si considerino il seguente dominio piano

$$A = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : x \geq -\frac{1}{4} + z^2,\ x^2 + z^2 \leq 4,\ z \geq 0\}$$

ed il solido V, ottenuto dalla rotazione completa di A attorno all'asse x.
a) Calcolare, se esiste, $\iiint_V x\, dxdydz$
b) Calcolare il volume del solido V
c) Scrivere una parametrizzazione di S, frontiera di V
d) Calcolare il versore normale ad S nel punto $P_o = \left(\frac{7}{4}, 1, 1\right)$ e stabilire se è diretto verso l'interno o l'esterno di S
e) Sia ora $T = S \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0\}$.
Calcolare il flusso del rotore del campo $\underline{F}(x, y, z) = y^2\, \underline{i} + (x + yz^2)\, \underline{j} - y\, \underline{k}$ attraverso T.

Esame del 7 luglio 2013

Esercizio 1A. Dato il campo vettoriale

$$F(x, y) = \left(y^2 \cos xy^2 + \frac{2ye^{xy}}{e^{xy} - e^{-1}} - 3,\ \frac{kxe^{xy}}{e^{xy} - e^{-1}} + 2xy \cos xy^2\right)$$

1) Rappresentare l'insieme di definizione I di F e specificare se è semplicemente connesso.
2) Determinare $k \in \mathbb{R}$ in modo che F sia conservativo in I e determinare tutti i potenziali di F in I.
3) Data la curva γ di equazione polare $\rho = \cos\theta$, con $\theta \in [-\pi/2, \pi/4]$, per i valori di k trovati al punto precedente, calcolare, se esiste, $\int_\gamma F$.

Esercizio 1B. Dato il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} y_1'(x) = -y_1(x) + y_2(x) - xe^{-x} \\ y_2'(x) = -5y_1(x) + 3y_2(x) + 2xe^{-x} \end{cases}$$

Determinare una soluzione particolare del sistema dato.

Esercizio 2A. Sia $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1,\ -y^2 \leq z - 1 \leq x + y + 2\}$.
a) Verificare che V è un dominio normale di $\mathbb{R}^3$ e calcolarne il volume.
b) Calcolare, se esiste, il versore normale alla superficie S frontiera di V nel punto $P_o = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 2)$, stabilendo se è rivolto verso l'interno o l'esterno di S.
c) Calcolare il flusso del rotore del campo vettoriale $F = (x, z\, y, y^2)$ attraverso T, dove T indica la superficie laterale di V.

Esercizio 2B. Determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$x^2\, y''(x) + 4\, x\, y'(x) + 2\, y(x) = x^2 + \frac{1}{x}\,,$$

che soddisfano la condizione $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2\, y(x) = 0\,.$

Esame del 10 settembre 2013

Esercizio 1A. Sia $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2-2y \le 0\,,\ -1 \le z \le 4 - \frac{1}{2}(x^2+y^2)\}$.
1) Calcolare il volume di V.
2) Stabilire se esiste ed, in caso affermativo, calcolare il vettore normale esterno alla frontiera di V nel punto $P_o = (0,\,1,\,\frac{7}{2})$.
3) Calcolare il flusso uscente del campo vettoriale $\underline{F}(x,y,z) = (-y,x,2)$ attraverso la superficie S, essendo S la parte della frontiera di V tale che $\quad z = 4 - \frac{1}{2}(x^2+y^2)\,.$

Esercizio 1B. È dato il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{4}{x}\, y(x) + \sqrt{-y(x)} \\ y(1) = -1 \end{cases}$$

1) Verificare che ha un'unica soluzione in un intorno del punto $x_o = 1$ e tracciare un grafico locale della soluzione.
2) Calcolare esplicitamente la soluzione del problema, determinandone l'insieme di definizione.

Esercizio 2A. Dato il campo vettoriale

$$F(x,y) = \Big(\frac{3x}{\sqrt{x^2+y^2+4y}} - \frac{2y}{1+x^2y^2},\ \frac{3(y+2)}{\sqrt{x^2+y^2+4y}} - \frac{2x}{1+x^2y^2}\Big)$$

1) Rappresentare l'insieme di definizione I di F e specificare se è semplicemente connesso.
2) Verificare se F è conservativo in I e, se esiste, trovarne un potenziale.
3) Data la curva γ di rappresentazione parametrica $r(t) = (4\cos^3 t, 4\sin^3 t)$ con $t \in [0,\pi/2]$, calcolare la lunghezza di tale curva e, se esiste, calcolare $\int_\gamma F$.

Esercizio 2B. Dato il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} y_1'(x) = y_1(x) - 6y_2(x) \\ y_2'(x) = 3y_1(x) - 8y_2(x) \end{cases}$$

Trovare tutte le soluzioni.

Esame del 15 gennaio 2014

Esercizio 1. Si consideri la regione piana $D = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 : y^2 + (z-2)^2 \ge 1\,,\ 0 \le z \le 4 - y^2, y \ge 0\}$.
1) Determinare il volume del solido V ottenuto ruotando D di $2\,\pi$ attorno all'asse z.
2) Dare una parametrizzazione della frontiera S di V e calcolare, se esiste, il versore normale esterno ad S nel punto $P_o = (\frac{1}{\sqrt{2}},\, \frac{1}{\sqrt{2}},\, 3)$.

Esercizio 2. È dato il seguente campo vettoriale piano

$$F(x,y) = \left(\frac{8x}{4x^2+(y-1)^2}\,,\ \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{2(y-1)}{4x^2+(y-1)^2}\right)$$

1) Determinare il dominio di F stabilendo se risulta connesso e/o semplicemente connesso.
2) Stabilire se F è conservativo nel suo insieme di definizione ed in caso affermativo calcolarne un potenziale.
3) Si consideri la curva C di rappresentazione parametrica $r(t) = \left(\cos t\,,\ 1 + \frac{1}{2}\sin t\right)$, $t \in [0,\ 2\pi]$.
Calcolare $\int_C F$ e l'area della regione E racchiusa dal sostegno di C.

==

1) Sia T il seguente insieme:

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - 1 \le z \le (\sqrt{x^2 + y^2} - 1)^2\}$$

◯ Il volume di T vale:

Vol $T = \pi$

◯ Il baricentro di T (supposto omogeneo) è il punto:

$G = (0,\ 0,\ -\frac{1}{5})$

◯ L'area della regione A ottenuta intersecando T col piano yz vale:

4

◯ La superficie S, frontiera di T, è regolare.

==

2) Sia C la curva piana di rappresentazione parametrica $r(t) = (\cos t + \sin t,\ \sin t - \cos t)$, $t \in [0,\ 2\pi]$.

◯ La curva C è chiusa con sostegno nel primo e nel terzo quadrante.

◯ La lunghezza di C è:

$4\,\pi$

◯ L'area della regione limitata da C vale:

$2\,\pi$

◯ L'equazione della retta tangente al sostegno di C nel punto $P(1,\ 1)$ ha equazione: $2x + y = 3$

==

3) Sia F il campo vettoriale $\underline{F}(x, y) = \dfrac{y}{x^2 + y^2}\,\underline{i} - \dfrac{x}{x^2 + y^2}\,\underline{j}$

◯ F è conservativo nel suo insieme di definizione

◯ Il lavoro di F lungo il segmento che unisce il punto $P_o\,(1,\ 0)$ al punto $P_1\,(-1,\ 0)$risulta:

$-2\,\pi$

◯ Il lavoro di F lungo l'ellisse di equazione $x^2 + 4\,y^2 = 4$, percorsa in senso antiorario vale:

$-2\,\pi$

◯ $\operatorname{div} F = 0$ e $\operatorname{rot} F \neq 0$

4) Siano S la superficie definita da:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ y \geq x\}$$

ed F il campo vettoriale $\underline{F}(x, y, z) = (x + y)\,\underline{i} + y\,\underline{j} + z\,\underline{k}$.

○ Il flusso del rotore di F vale:
$2\,\pi$

○ Il versore normale interno ad S nel punto $P_o\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\, 0,\, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ risulta:
$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\, 0,\, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

○ Il piano tangente ad S nel punto $P_1\left(0,\, \frac{1}{\sqrt{2}},\, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ha equazione:
$y + z = \sqrt{2}$

○ L'area di S vale: $4\,\pi$

==

5) Si consideri il seguente problema differenziale:

$$x''(t) - 5\,x'(t) + 6\,x(t) = e^{2t} + \frac{1}{t-1}\,,\ x(0) = 1$$

○ Il problema ammette infinite soluzioni definite in $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

○ Si consideri il sistema differenziale equivalente all'equazione data. Una matrice fondamentale del sistema omogeneo associato è:
$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & 2\,e^{3t} \\ 2\,e^{2t} & 4\,e^{3t} \end{pmatrix}$

○ Tutte le soluzioni del problema iniziale sono date da:
$x(t) = C\,e^{2t} + (1 - C)\,e^{3t} - t\,e^{2t} + x_1(t)$, con x_1 che risolve il seguente problema:
$\begin{cases} x''(t) - 5\,x'(t) + 6\,x(t) = \dfrac{1}{t-1} \\ x(0) = 1 \end{cases}$ e $C \in \mathbb{R}$

○ Tutte le soluzioni del problema iniziale sono date da:
$x(t) = C\,e^{2t} + (1 - C)\,e^{3t} - t\,e^{2t} + x_1(t)$, con x_1 che risolve il seguente problema:
$\begin{cases} x''(t) - 5\,x'(t) + 6\,x(t) = \dfrac{1}{t-1} \\ x(0) = 0 \end{cases}$ e $C \in \mathbb{R}$

Esame del 5 febbraio 2014

Esercizio 1. Si consideri la regione $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 2\,,\ -x^2 - y^2 \leq z \leq 1\}$.

1) Calcolare, se esiste, $\iiint_V (z + x)\,dxdydz$.

2) Calcolare l'area della superficie $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 2\,,\ -x^2 - y^2 \leq z \leq 1\}$.

Esercizio 2. È dato il seguente campo vettoriale

$$F(x, y) = \left(\frac{2x}{(x^2 + y^2)(y - 1)}\,,\ \frac{2y}{(x^2 + y^2)(y - 1)} - \frac{\ln(x^2 + y^2)}{(y - 1)^2}\right)$$

1) Determinare, motivando, il più grande sottoinsieme del piano in cui F ammette potenziale.

Esercizio 3. È dato il sistema differenziale $\begin{cases} y_1'(x) = 2\,y_1(x) + k\,y_2(x) - 1 \\ y_2'(x) = 2\,y_1(x) - 2\,y_2(x) + 1 \end{cases}$, $k \in \mathbb{R}$.

Determinare i valori di k per cui tutte le soluzioni del sistema sono limitate in $(-\infty, +\infty)$.

Esercizio 3. (variante) Stabilire se esistono ed, in caso affermativo, calcolare tutti i punti di massimo e minimo assoluto di

$$f(x,y) = x^2 y + \frac{1}{5}\,y^5$$

soggetta al vincolo $x^2 + y^4 = 1$.

==

1) Il baricentro del tetraedro omogeneo T delimitato dai piani coordinati e dal piano di equazione $x + y + \dfrac{z}{2} = 1$ è il punto:

○ $G = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$

○ $G = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right)$

○ $G = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$

○ $G = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$

==

2) Si consideri il seguente problema differenziale:

$$\begin{cases} y_1'(x) = 5\,y_1(x) - 3\,y_2(x) + \dfrac{k}{x} \\ y_2'(x) = 3\,y_1(x) - 5\,y_2(x) + e^{4x} \end{cases}$$

○ Per $k = 1$ il sistema ha soluzioni definite in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

○ Per $k = 1$ una matrice fondamentale del sistema omogeneo associato è:
$\mathbf{\Phi}(x) = \begin{pmatrix} 3\,e^{4x} & e^{-4x} \\ e^{4x} & 4\,e^{-4x} \end{pmatrix}$

○ Se $k = 0$ esistono infinite soluzioni infinitesime a $-\infty$

○ Se $k = 0$ una soluzione del sistema è data da:
$\begin{cases} y_1(x) = \dfrac{8}{3}\,e^{4x} + \dfrac{4}{3}\,x\,e^{4x} \\ y_2(x) = e^{4x} + \dfrac{x}{2}\,e^{4x} \end{cases}$

3) Siano

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1,\, 0 \leq z \leq 2 - \sqrt{x^2 + y^2}\,\} \quad \text{ed} \quad F(x, y, z) = (x, y, z)$$

○ Il flusso uscente di F attraverso la frontiera di V vale: $2\,\pi$

○ Il flusso uscente di F attraverso la frontiera di V vale: $4\,\pi$

○ Il versore normale esterno alla frontiera di V in $P(0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ è: $\underline{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$

○ Il versore normale esterno alla frontiera di V in $P(0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ è: $\underline{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

==

4) Siano C la curva piana di rappresentazione parametrica $r(t) = (\cos t,\, \sin t\,(2 + \cos t))$, $t \in [0,\, 2\pi]$ ed $F(x, y, z) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}\right)$

○ La curva C è chiusa e non regolare.

○ L'area della regione limitata da C vale: $4\,\pi$

○ L'area della regione limitata da C vale: $2\,\pi$

○ $\int_C F = 0$

==

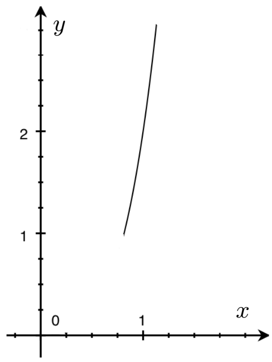
5) Si consideri il seguente problema differenziale:

$$y'(x) = \frac{2\,y(x)}{x} + 2\,x\,\sqrt{y(x)}\,, \quad y(1) = 2$$

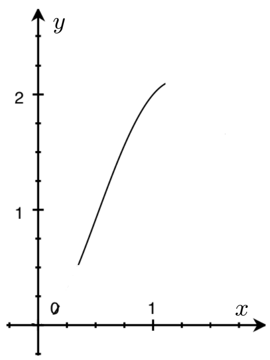
○ La funzione $y(x) = x^2\,(x + \sqrt{2} - 1)^2$ risolve il problema in $\mathbb{R}$.

○ La funzione $y(x) = x^2\,(x - \sqrt{2} - 1)^2$ risolve il problema in $(0, +\infty)$.

○ La soluzione del problema ha il seguente grafico locale:



○ La soluzione del problema ha il seguente grafico locale:



Esame del 15 aprile 2014

Esercizio 1. Si consideri sul piano xz la curva C di rappresentazione parametrica $r(t) = (t\,\sin t, t\,\cos t)$, con $t \in [0, \pi]$.

1. [6 punti] Dopo averne disegnato sul piano xz la traccia, determinarne la lunghezza e, se esiste, calcolare l'equazione della retta tangente a C nel punto $P = (\frac{\pi}{2}, 0)$.
   Sia S la superficie generata dalla rotazione di C di 2π attorno all'asse z.
2. [4 punti] Dare una parametrizzazione di tale superficie e calcolare il flusso uscente da S del campo vettoriale $\underline{F}(x, y, z) = (1, 0, 0)$.

Esercizio 2. È dato il seguente campo vettoriale

$$F(x, y) = \left(\frac{ax + b}{1 - x^2 + y^2}\,, \frac{py + q}{1 - x^2 + y^2} \right)$$

1. [2 punti] Determinare e disegnare il dominio I del campo e stabilire se è semplicemente connesso.
2. [3 punti] Determinare i valori dei parametri $a, b, p, q \in \mathbb{R}$ per cui F è conservativo nel suo dominio.
3. [5 punti] Se C è la circonferenza di centro $(0, 0)$ e raggio $r > 0$, "orientata in senso orario", posti $a = 1 = p$ e $b = 0 = q$, calcolare, se esiste, $\displaystyle\int_C F$.

Esercizio 3. È dato il seguente sistema differenziale $\begin{cases} y_1'(x) = 2\,y_1(x) - y_2(x) \\ y_2'(x) = y_1(x) + \sin x \end{cases}$

1. [3 punti] Determinare una matrice fondamentale del sistema omogeneo associato.
2. [3 punti] Stabilire se l'insieme delle soluzioni del **sistema omogeneo** associato, **che sono infinitesime a** $-\infty$, costituisce uno spazio vettoriale ed, in caso affermativo, determinarne la dimensione.
3. [4 punti] Calcolare tutte le soluzioni del sistema completo che verificano la condizione

$$y_1(0) = 0 = y_2(0).$$

Esame del 10 giugno 2014

Esercizio 1. Si consideri il solido V_h ottenuto dalla rotazione completa attorno all'asse z dell'insieme

$$E_h = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le z \le |\ln y|\,,\ 0 < y \le 1\} \cap \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : z \le h\}\,,\ h > 0$$

1) Calcolare il volume di V_h e stabilire se il limite per $h \to +\infty$ di tale volume è finito.

2) Sia $h = 1$. Calcolare l'area della superficie S frontiera di V_1.

Esercizio 2. È dato il sistema differenziale $(*)$ $\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) - \sin y(t)\,,\ x(0) = \pi \\ \dot{y}(t) = x(t) - \cos y(t)\,,\ y(0) = \pi \end{cases}$

1) Stabilire se esiste un'unica soluzione del problema dato e se tale soluzione è globale.

2) Scrivere il problema linearizzato associato a $(*)$ e determinarne tutte le soluzioni.

Esercizio 2.(variante) È dato il sistema differenziale $(*)$ $\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) - y(t) + \cos t\,,\ x(0) = 0 \\ \dot{y}(t) = x(t) + y(t) + 1\,,\ y(0) = 0 \end{cases}$

1) Determinare una matrice fondamentale del sistema omogeneo associato.

2) Calcolare tutte le soluzioni del problema dato.

==

1) Sia $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1,\ y \le 1 + \sqrt{3}\,x\}$.

○ L'area di A vale $\dfrac{2}{3}\pi + \dfrac{\sqrt{3}}{4}$

○ L'area di A vale $\dfrac{3}{4}\pi$

○ La lunghezza della frontiera di A è $\pi + \sqrt{3}$

○ La lunghezza della frontiera di A è $\dfrac{\pi}{3} + \sqrt{3}$

==

2) Sia γ la curva piana di rappresentazione parametrica $r(t) = (\cos^3 t,\ \sin^3 t),\ t \in [0,\ \frac{\pi}{2}]$.

○ La curva è semplice, ma non regolare.

○ Il versore tangente alla curva nel punto $P_o\,(\frac{1}{2\sqrt{2}},\ \frac{1}{2\sqrt{2}})$ è $\underline{n} = (\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}})$

○ La retta tangente alla curva γ nel punto $P_o\,(\frac{1}{2\sqrt{2}},\ \frac{1}{2\sqrt{2}})$ ha equazione $\sqrt{2}\,x + \sqrt{2}\,y = 1$

○ La lunghezza di γ è $l(\gamma) = \dfrac{10}{3}$

==

3) Sia V il solido $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2\sqrt{x^2+y^2} \le z \le 1 + x^2 + y^2\}$, S la sua frontiera ed F il campo vettoriale $F(x,y,z) = (z, x^2\,y, y^2\,z)$

○ Il volume di V vale $\dfrac{\pi}{6}$

○ Il volume di V vale $\dfrac{\pi}{12}$

○ Il flusso del campo F uscente da S vale: $\dfrac{\pi}{10}$

○ Il flusso del campo F uscente da S vale: $\dfrac{\pi}{40}$

==

4) Sia F il campo vettoriale piano $F(x,y) = \left(\dfrac{3\,x^2}{x^3+y},\ \dfrac{1}{x^3+y} + \sin y\right)$

○ La circuitazione di F lungo la curva di equazione cartesiana $x^2 + y^2 = 2(x+y)$ vale: 0

○ Il lavoro di F lungo il segmento che unisce il punto $P_o\,(1,\ 0)$ al punto $P_1\,(-1,\ 0)$ vale: 0

○ Se $\gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$, percorsa in senso orario, allora

$$\int_\gamma F = -1 + \cos(1)$$

○ Il dominio I di F non è semplicemente connesso, né connesso.

5) Sia Σ la porzione di superficie di equazione $z = x\,y$, che si proietta in

$$I = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le \sqrt{3}\,x,\ x^2 + y^2 \le 1\}$$

○ L'area di Σ è $\dfrac{\pi}{6}\,(2\sqrt{2} - 1)$

○ L'area di Σ è $\dfrac{\pi}{3}\,(\sqrt{2} - 1)$

○ Il versore normale a Σ nel punto $P_o\,(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ è $\underline{n} = (-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}})$

○ Il versore normale a Σ nel punto $P_o\,(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ è $\underline{n} = (\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}})$

Esame del 3 luglio 2014

Esercizio 1. Sia C la curva sul piano xz di equazione cartesiana $x = \cos z$, con $-\dfrac{\pi}{2} \le z \le \dfrac{\pi}{2}$ ed S la superficie ottenuta ruotando C di $2\,\pi$ attorno all'asse z.
1) Scrivere una parametrizzazione di S, calcolare l'area della superficie e determinare, se esiste, l'equazione del piano tangente ad S nel punto $P = \left(-\frac{1}{2}\,, -\frac{1}{2}\,, \frac{\pi}{4}\right)$.
2) Calcolare il volume della regione V racchiusa da S.

Esercizio 2. Sia F il campo vettoriale piano così definito

$$\underline{F}(x, y) := \left(y\,e^{xy} + \frac{a\,y - 3}{(x-3)^2 + (y-3)^2},\ x\,e^{xy} + \frac{3 + b\,x}{(x-3)^2 + (y-3)^2}\right)\ ,\ a, b \in \mathbb{R}$$

1) Determinare i valori dei parametri a, $b \in \mathbb{R}$ per cui F è irrotazionale nel suo dominio I.

2) Per tali valori dei parametri stabilire se F è conservativo in I.

3) Sia Γ la curva di rappresentazione parametrica $r(t) = (3 + 2\,\cos^3 t,\ 3 + 2\,\sin^3 t)\ ,\ t \in [0,\,2\pi]$.
Sempre per i valori dei parametri trovati al punto 1), calcolare, se esiste, $\displaystyle\int_\Gamma F$.

==

1) Sia $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2 - z \ge 2\sqrt{x^2 + y^2},\ x^2 + y^2 + (z + \frac{1}{2})^2 \ge \frac{5}{4},\ z \ge 0\}$.

○ Il volume di V vale: $\dfrac{5}{12}\pi\,(3 - \sqrt{5})$

○ Il volume di V vale: $\dfrac{\pi}{3}\,(5 - \sqrt{5})$

○ L'area della frontiera di T vale: $\pi\,(5 + \sqrt{5})$

○ L'area della frontiera di T vale: $2\pi\,(5 + \sqrt{5})$

==

2) Sia A la regione piana interna alla circonferenza di equazione cartesiana $x^2 + y^2 = 1$ ed esterna alla cardioide di rappresentazione parametrica $r(t) = \big((1 - \cos t)\cos t,\ (1 - \cos t)\sin t\big)$, $t \in [0, 2\pi]$.

○ L'area di A vale: $4 - \dfrac{\pi}{2}$

○ L'area di A vale: $2 - \dfrac{\pi}{4}$

◯ La lunghezza della frontiera di A è: $2(\pi - 1)$

◯ La lunghezza della frontiera di A è: $\pi - 2$

==

3) Siano $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + 4\,y^2\,,\ z \le 1\}\,, F$ il campo vettoriale $F(x,y,z) = (y, xz, xz^2)$ ed n il versore normale ad S con componente lungo l'asse z positiva

◯ L'equazione del piano tangente ad S in $P_o = \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\,, \frac{1}{8}\,, \frac{1}{4}\right)$ è: $4x + 8y - 8z = \sqrt{3} - 1$

◯ L'equazione del piano tangente ad S in $P_o = \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\,, \frac{1}{8}\,, \frac{1}{4}\right)$ è: $2\sqrt{3}x + 4y - 4z = 1$

◯ Il flusso del $\operatorname{rot} F$ attraverso S nella direzione n vale: π

◯ Il flusso del $\operatorname{rot} F$ attraverso S nella direzione n vale: -2π

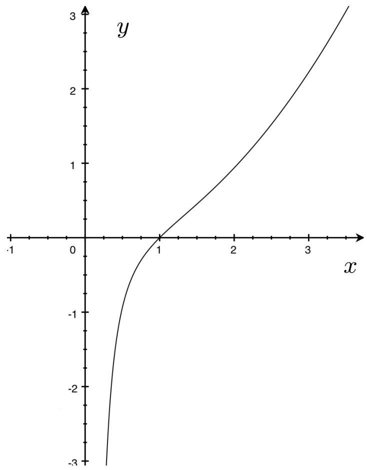
==

4) Si consideri il seguente problema differenziale

$$x^2\,y''(x) + 2\,x\,y'(x) - 2\,y(x) = x^2\,, \quad y(1) = 0,\ y'(1) = 1$$

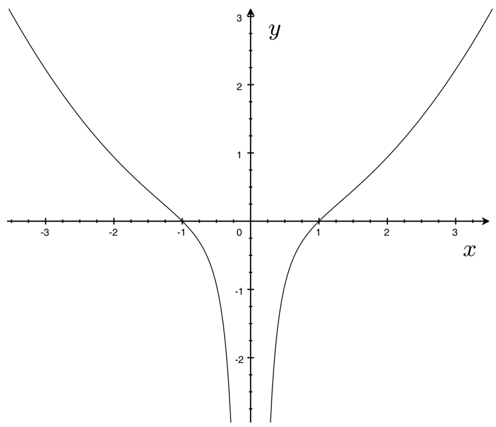
◯ La soluzione del problema è localmente convessa.

◯ Il grafico della soluzione del problema è:



◯ Il problema ammette una soluzione definita in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

◯ Il grafico della soluzione del problema è:



5) Si consideri il seguente problema differenziale:

$$\begin{cases} y_1'(x) = y_1(x) - y_2(x) - x \\ y_2'(x) = 3\,y_1(x) - 3\,y_2(x) \end{cases} \quad , \; y_1(0) = 0$$

○ Il problema ha un'unica soluzione definita in $\mathbb{R}$

○ Una matrice fondamentale del sistema omogeneo associato è:
$\mathbf{\Phi}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2\,e^{-2x} \\ 1 & 3\,e^{-2x} \end{pmatrix}$

○ Una soluzione del problema è:
$$\begin{pmatrix} 2 - 2\,e^{-2x} - \frac{3}{4}x^2 + \frac{x}{4} \\ 2 - 6\,e^{-2x} - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

○ L'insieme delle soluzioni del problema costituisce uno spazio vettoriale di dimensione 1

Esame del 9 settembre 2014

Esercizio 1. Siano $A = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\, 2z \geq x,\, hx \leq h - z\}$, $h > 0$ e V il solido ottenuto ruotando A di 2π attorno all'asse x.
1) Determinare il volume di V al variare di $h \in \mathbb{R}$, $h > 0$.
2) Determinare il valore di $h \in \mathbb{R}$, $h > 0$, in modo che il baricentro di V, supposto omogeneo, sia nel punto $P = \left(\frac{1}{6}\,,\, 0\,,\, 0\right)$.

Esercizio 2. Sia F il campo vettoriale piano così definito

$$\underline{F}(x, y) := \left(\frac{x - k\,y}{\sqrt{x^2 - 4xy + 3y^2}}, \frac{3\,y - k\,x}{\sqrt{x^2 - 4xy + 3y^2}} \right) \,,\; k \in \mathbb{R}$$

1) Determinare e disegnare il dominio D di $\underline{F}$, stabilendo se è connesso e/o semplicemente connesso.
2) Calcolare il valore di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\underline{F}$ è conservativo in D.
3) Per il valore del parametro k determinato al punto precedente, se Γ è la curva di rappresentazione parametrica $r(t) = (\cos^2 t,\, \sin t)\,,\; t \in [\frac{5}{4}\pi,\, \frac{3}{2}\pi]$, calcolare, se esiste, $\int_\Gamma F$.

==

1) Sia T la superficie ottenuta ruotando attorno all'asse x di 2π la curva C sul piano xz di equazione cartesiana $\quad z = \sin x,\; x \in [0, \pi]$

○ La superficie è dotata di piano tangente in ogni suo punto ed è frontiera di un dominio chiuso e limitato di $\mathbb{R}^3$

○ Uno dei versori normali a T in $P_o = \left(\frac{\pi}{4}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ è $\quad \underline{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$

○ Uno dei versori normali a T in $P_o = \left(\frac{\pi}{4}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ è $\quad \underline{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$

○ L'equazione del piano tangente a T in $P_1 = \left(\frac{\pi}{2}, 1, 0\right)$ è $\quad y + z = 1$

2) Si consideri il seguente problema differenziale:

$$(*) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = x^2(t) + y(t) + \dfrac{1}{t-1}\,, & x(0) = 1 \\ \dot{y}(t) = x(t) - y^2(t)\,, \quad y(0) = -1 \end{cases}$$

○ Il problema ha un'unica soluzione definita in $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

○ La componente y della soluzione del problema dato è convessa in un intorno di $t_o = 0$

○ Il problema linearizzato associato a $(*)$ è $\begin{cases} \dot{x}(t) = 2\,x(t) + y(t) - 1 + \dfrac{1}{t-1}\,, & x(0) = 1 \\ \dot{y}(t) = x(t) + 2\,y(t) + 1\,, \quad y(0) = -1 \end{cases}$

○ Il problema linearizzato associato a $(*)$ è $\begin{cases} \dot{x}(t) = 2\,x(t) + y(t) - 2 + \dfrac{1}{t-1}\,, & x(0) = 1 \\ \dot{y}(t) = x(t) - 2\,y(t) + 1\,, \quad y(0) = -1 \end{cases}$

==

2) (variante) Siano $f(x,y) = x\,y$ e $g(x,y) = x^2 - x\,y + y^2 - 1$.

○ Il massimo assoluto di f ristretta al vincolo $g(x,y) = 0$ vale 1

○ Il minimo assoluto di f ristretta al vincolo $g(x,y) = 0$ vale $-\dfrac{1}{2}$

○ La funzione f ristretta al vincolo $g(x,y) = 0$ non ha massimo assoluto

○ La funzione f ristretta al vincolo $g(x,y) = 0$ non ha minimo assoluto

==

3) Siano

$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \, x^2{+}y^2 \le z^2 \le 3(x^2{+}y^2),\; x^2{+}y^2{-}4\,y \le 0\}$ ed $\underline{F}(x,y,z) = (\dfrac{3}{64}\,x{+}y,\, \dfrac{1}{16}\,y{+}z,\, \dfrac{1}{32}\,z)$

○ Il volume di V è $\dfrac{64}{9}$

○ Il volume di V è $\dfrac{8}{9}\,(\sqrt{3} - 1)$

○ Il flusso uscente di F attraverso la frontiera di V vale: $8(\sqrt{3} - 1)$

○ Il flusso uscente di F attraverso la frontiera di V vale: 1

==

4) Sia γ la curva sul piano xy di rappresentazione parametrica $r(t) = (x(t),\, t - t^2)$, $t \in [0,\, 1]$ ed

$$x(t) = \begin{cases} -t^2 \ln t & \text{per } t \in (0, 1] \\ 0 & \text{per } t = 0 \end{cases}$$

○ γ è una curva chiusa con traccia orientata in senso antiorario

○ L'area della regione limitata A racchiusa dalla traccia di γ vale: $\dfrac{1}{72}$

○ L'area della regione limitata A racchiusa dalla traccia di γ vale: $\dfrac{1}{36}$

○ Una parametrizzazione della superficie S ottenuta da una rotazione completa della traccia di γ attorno all'asse x è: $\begin{cases} x = -t^2 \ln t \cos\theta \\ y = t - t^2 \\ z = -t^2 \ln t \sin\theta \end{cases}$, $0 < t \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi$

==

5) Si consideri il seguente sistema differenziale:

$$\begin{cases} y'(x) = -3\,y(x) + 2\,z(x) + 3\,\cos(2x) \\ z'(x) = -2\,y(x) - 3\,z(x) - 3\,\sin(2x) \end{cases}$$

○ Il sistema dato non ha soluzioni periodiche

○ Una matrice fondamentale del sistema omogeneo associato è:
$\mathbf{\Phi}(x) = \begin{pmatrix} e^{-3x}\cos(2x) & -2\,e^{-3x}\sin(2x) \\ e^{-3x}\sin(2x) & e^{-3x}\cos(2x) \end{pmatrix}$

○ Il problema differenziale associato al sistema dato con condizioni $\begin{cases} y(0) + z(0) = 1 \\ y(\pi) + z(\pi) = 4 \end{cases}$ ha infinite soluzioni

○ Il problema differenziale associato al sistema dato con condizioni $\begin{cases} y(0) + z(0) = 1 \\ y(\pi) + z(\pi) = 2 \end{cases}$ non ha soluzioni

Esame del 29 ottobre 2014

Esercizio 1. Sia $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 - z^2 \leq 0,\ 0 \leq z \leq 1 - \frac{x}{2}\}$.

1) Disegnare la sezione di V sul piano xz.

2) Calcolare, se esiste, $\iiint_V z\,dxdydz$.

Esercizio 2. Sia F il campo vettoriale piano così definito

$$\underline{F}(x, y) := \left(\frac{y - k\,x}{k\,x^2 + y^2}, -\frac{x + y}{k\,x^2 + y^2}\right),\ k \in \mathbb{R}$$

1) Disegnare il dominio D di $\underline{F}$ al variare di $k \in \mathbb{R}$, stabilendo se è connesso e/o semplicemente connesso.

2) Sia ora $k \geq 0$. Determinare, se esistono, i valori di k per cui $\underline{F}$ è conservativo in D.

3) Per i valori del parametro $k \geq 0$ determinati al punto precedente, calcolare tutti i potenziali di $\underline{F}$ in D.

==

1) Siano S la superficie di equazione cartesiana $x^2 + y^2 + 2\,(z - 1)^2 = 6$, con $z \geq 0$ ed $\underline{F}$ il campo vettoriale così definito: $\underline{F}(x, y, z) = \left(x\,z - y^3 \cos z,\ x^3 e^z,\ x\,y\,z\,e^{x^2+y^2+z^2}\right)$.

○ Il versore normale ad S in $P_o = \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0\right)$ è il vettore $\underline{n} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

○ Il versore normale ad S in $P_o = \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0\right)$ è il vettore $\underline{n} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

○ Il flusso del rotore di F attraverso S nella direzione del versore normale con componente $\underline{k}$ positiva vale: $-24\,\pi$

○ Il flusso del rotore di F attraverso S nella direzione del versore normale con componente $\underline{k}$ positiva vale: $6\,\pi$

==

2) Si consideri il seguente problema differenziale:

$$\begin{cases} x^2\,y''(x) - 3\,x\,y'(x) + 4\,y(x) = -2\,x \\ y(1) = 1,\ y'(1) = 1 \end{cases}$$

○ Il problema dato ha un'unica soluzione definita in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

○ La soluzione y del problema presenta un punto di massimo relativo in $x_o = 1$

○ La soluzione del problema è:

$$y(x) = \begin{cases} 3\,x^2\,(1 - \ln|x|) - 2\,x & \text{in } (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \\ 0 & \text{in } x = 0 \end{cases}$$

○ La soluzione del problema è:

$$y(x) = 3\,x^2 - 3\,x^2\,\ln x - 2\,x \quad \text{in } (0, +\infty)$$

==

3) Sia $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \le 4\,x,\ y \le \dfrac{x}{\sqrt{3}}\}$.

○ $\displaystyle\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$ vale 30

○ $\displaystyle\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$ vale 6

○ L'area di D vale: $\dfrac{13}{3}\,\pi + \dfrac{\sqrt{3}}{4}$

○ L'area di D vale: $\dfrac{8}{3}\,\pi + \sqrt{3}$

==

4) Siano γ la curva sul piano xy di rappresentazione parametrica $r(t) = (\cos t,\ t\,\sin t)$, $t \in [0,\ 2\pi]$ ed $\underline{F}(x,y) = \left(\dfrac{-y}{x^2+y^2} + \cos x,\ \dfrac{x}{x^2+y^2} - y \right)$.

○ Il campo $\underline{F}$ è conservativo nel suo dominio

○ Se C è una curva regolare a tratti, semplice, chiusa, con traccia contenuta nel dominio di $\underline{F}$, allora

$$\int_\gamma F = \int_C F$$

○ La circuitazione di $\underline{F}$ estesa alla curva γ percorsa in senso orario vale: $-2\,\pi$

○ La circuitazione di $\underline{F}$ estesa alla curva γ percorsa in senso orario vale: π

5) Siano $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 9(x^2+y^2) - 4(z-3)^2 \leq 0,\ 0 \leq z \leq 3,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$ ed
$\underline{F}(x,y,z) = (3x+y^2)\,\underline{i} - (4z+y)\,\underline{j} + (x^2+y^2-z)\,\underline{k}$.

○ Il volume di T è: π

○ Il volume di T è: $2\,\pi$

○ Il flusso uscente di $\underline{F}$ dalla frontiera di T vale: $8\,\pi$

○ Il flusso uscente di $\underline{F}$ dalla frontiera di T vale: $-4\,\pi$

Esame del 13 gennaio 2015

Esercizio 1. Si consideri il solido T così definito

$$T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq x\,y\,,\ (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 2\,\}$$

1) Disegnare la sezione di T con il piano di equazione $z = 0$.
2) Calcolare il volume di T.

Esercizio 2. Si consideri il seguente campo di forze:

$$F(x,y) = \left(\ln(x-y) + \frac{ax}{x-y} - \frac{1}{2\sqrt{1-x}}\ ;\ \frac{x}{y-x} + \frac{1}{2\sqrt{y+1}} \right)$$

a) Dopo aver rappresentato graficamente il dominio del campo, determinare (se possibile) i valori del parametro reale a in modo tale che il campo risulti conservativo.
b) Per tali valori, se ne esistono, determinare tutti i potenziali del campo.

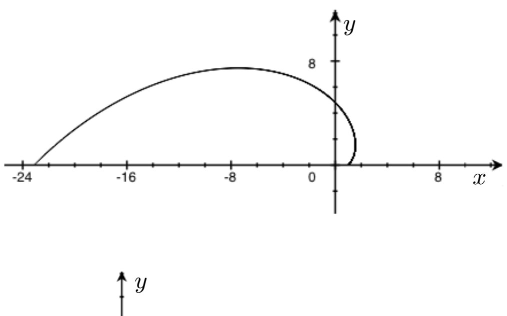
==

1) Si consideri il seguente problema di Cauchy: $\begin{cases} x'(t) = x(t) - y(t)\,, & x(0) = 1 \\ y'(t) = y(t) + x(t)\,, & y(0) = 0 \end{cases}$ e sia C la curva di rappresentazione parametrica $r(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [0, \pi]$, ove x ed y costituiscono la soluzione del problema differenziale.

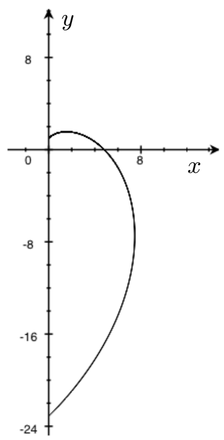
○ La lunghezza della curva C è: $\sqrt{2}\,(e^{2\pi} - 1)$

○ La lunghezza della curva C è: $(e^{\pi} - 1)$

○ La traccia di C è:



○ La traccia di C è:



2) Siano $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{2x^2+y^2},\ -1 \le x \le 2,\ \frac{1}{2} \le y \le 2\}$ ed $F(x,y,z) = (y, -2x, 1)$.

○ Il flusso del campo F attraverso Σ nella direzione del versore normale a Σ con componente lungo l'asse z positiva vale $-\frac{25}{24}$

○ Il flusso del campo F attraverso Σ nella direzione del versore normale a Σ con componente lungo l'asse z positiva vale $\frac{9}{2}$

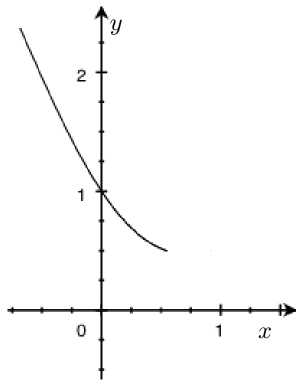
○ Il flusso di rot F attraverso Σ nella direzione del versore normale a Σ con componente lungo l'asse z negativa vale $-\frac{4}{5}$

○ Il flusso di rot F attraverso Σ nella direzione del versore normale a Σ con componente lungo l'asse z negativa vale $\frac{7}{8}$

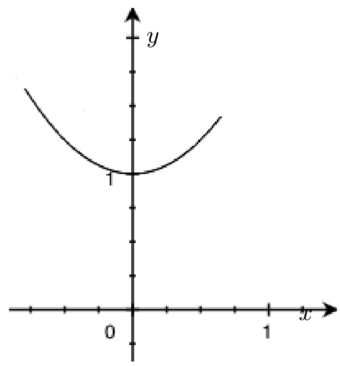
==

3) È dato il sistema differenziale $\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + B(t)$, $A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin 2t \end{pmatrix}$

○ Sia $\alpha = -4$. Il grafico locale della componente x della soluzione del sistema tale che $x(0) = 1$, $y(0) = 1$ è:



○ Sia $\alpha = -4$. Il grafico locale della componente x della soluzione del sistema tale che $x(0) = 1$, $y(0) = 1$ è:



○ Se $\alpha = -4$ esistono soluzioni del sistema limitate in $[0, +\infty)$

○ Se $\alpha \neq -4$ esistono soluzioni del sistema limitate in $[0, +\infty)$

==

4) Siano γ la curva sul piano $x\,y$ di rappresentazione parametrica $r(t) = (\sqrt{2}\cos^3 t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$, D la regione piana racchiusa da γ ed $\underline{F}(x,y) = (xy, y)$.

○ L'area della regione D vale: $\frac{3}{4}\sqrt{2}\,\pi$

○ L'area della regione D vale: $\frac{3}{2}\sqrt{2}\,\pi$

○ $\displaystyle\iint_D \operatorname{div} F\, dxdy = \frac{\pi}{4}$

○ $\displaystyle\iint_D \operatorname{div} F\, dxdy = \frac{3}{2}\sqrt{2}\,\pi$

==

5) Sia $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 8 - x^2 - (y + 2)^2\}$.

○ L'equazione del piano tangente ad S in $P_o = (-2, 0, 0)$ è: $\quad 2\,y + z = 0$.

○ L'equazione del piano tangente ad S in $P_o = (-2, 0, 0)$ è: $\quad z = 4\,x + 4\,y + 8$.

○ Il versore normale ad S nel punto $P_o = (-2, 0, 0)$ con componente lungo l'asse z positiva è $\underline{n} = (-\frac{4}{\sqrt{33}}, \frac{4}{\sqrt{33}}, \frac{1}{\sqrt{33}})$

○ Il versore normale ad S nel punto $P_o = (-2, 0, 0)$ con componente lungo l'asse z positiva è $\underline{n} = (\frac{1}{\sqrt{33}}, -\frac{1}{\sqrt{33}}, \frac{1}{\sqrt{33}})$

Esame del 6 febbraio 2015

Esercizio 1. Siano $A = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le z \le 6 - y^2\,,\ 2 - y \le z \le y\}$ e V il solido omogeneo ottenuto dalla rotazione completa di A attorno all'asse z.
1) Determinare il volume di V.
2) Calcolare le coordinate del baricentro di V.

Esercizio 2. Si consideri il seguente sistema differenziale:

$$Y'(x) = A \cdot Y(x) + B(x)\,, \text{ con } Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ e } B(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ e^x \end{pmatrix}.$$

a) Determinare una matrice fondamentale del sistema omogeneo associato.
b) Calcolare tutte le soluzioni del sistema dato tali che $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

==

1) Siano C la curva sul piano xz di rappresentazione $r(t) = (\cos(2t), 2\,\sin t)$, $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$, S la superficie ottenuta dalla rotazione completa di C attorno all'asse z ed $\underline{F}(x, y, z) = (y,\ -x,\ z)$.

○ Il flusso del rotore di $\underline{F}$ attraverso S nella direzione del versore normale con componente $\underline{k}$ negativa vale $\quad -\frac{\pi}{2}$

○ Il flusso del rotore di $\underline{F}$ attraverso S nella direzione del versore normale con componente $\underline{k}$ negativa vale $\quad 2\,\pi$

○ Il flusso di $\underline{F}$ attraverso S nella direzione del versore normale con componente $\underline{k}$ negativa vale $\frac{4}{15}\sqrt{2}\,\pi$

○ Il flusso di $\underline{F}$ attraverso S nella direzione del versore normale con componente $\underline{k}$ negativa vale $-\frac{\sqrt{2}}{15}\,\pi$

==

2) Sia $\underline{F}$ il campo vettoriale così definito:

$$\underline{F}(x, y) = \frac{y - 1}{(x + 1)^2 + (y - 1)^2}\,\underline{i} - \frac{x + 1}{(x + 1)^2 + (y - 1)^2}\,\underline{j}\,.$$

○ Il lavoro di $\underline{F}$ lungo l'ellisse di equazione $(x+1)^2 + 4\,(y-1)^2 = 4$, percorsa in senso antiorario, vale $\quad -2\,\pi$

○ Il lavoro di $\underline{F}$ lungo l'ellisse di equazione $(x+1)^2 + 4\,(y-1)^2 = 4$ vale $\quad 0$

○ Il lavoro di $\underline{F}$ lungo l'ellisse di equazione $(x+1)^2 + 4\,(y-1)^2 = 4$, percorsa in senso antiorario, vale $\quad 2\,\pi$

○ $\operatorname{div}\underline{F} = 0$ e $\operatorname{rot}\underline{F} \neq \underline{0}$

==

3) Sia $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, 0 \le x \le y \, , \, x^2+y^2-x \ge 0 \, , \, x^2+y^2-2\,x \le 0\,\}$

○ L'area di A è: $\quad \dfrac{3}{2}\,(\pi - 1)$

○ L'area di A è: $\quad (\pi - 1)$

○ La lunghezza della frontiera di A è: $\quad \dfrac{\pi + \sqrt{2}}{2}$

○ La lunghezza della frontiera di A è: $\quad \dfrac{3\,\pi + 2\,\sqrt{2}}{4}$

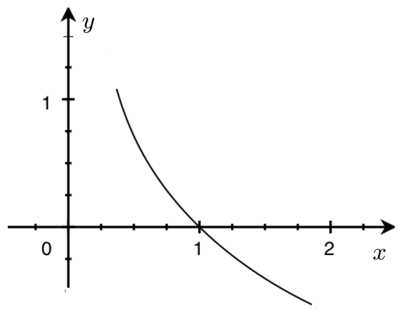
==

4) Si consideri la seguente equazione differenziale:

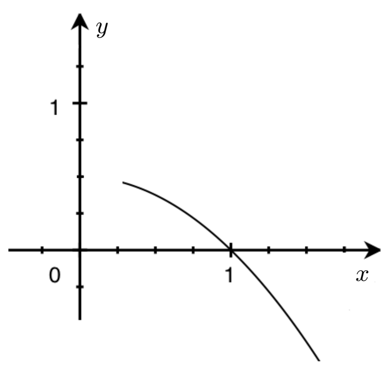
$$x^2\, y''(x) + x\, y'(x) = \ln^2(|x|)$$

○ Tutte le soluzioni dell'equazione sono definite in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

○ La soluzione dell'equazione tale che $y(1) = 0$, $y'(1) = -1$ ha il seguente grafico locale:



○ La soluzione dell'equazione tale che $y(1) = 0$, $y'(1) = -1$ ha il seguente grafico locale:



○ La soluzione dell'equazione tale che $y(-e) = 1$, $y'(-e) = 0$ ha un punto di massimo relativo in $x_o = -e$

5) Sia $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - y^2 - z^2 = 1\,,\, 1 \leq x \leq 3\}$.

○ L'equazione del piano tangente ad S in $P_o = (2, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2})$ è: $\quad \sqrt{3}\,x - 2\,y + 2\,\sqrt{3}\,z = 4\,\sqrt{3}$.

○ L'equazione del piano tangente ad S in $P_o = (2, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2})$ è: $\quad x - 2\,\sqrt{3}\,y + z = \frac{1}{2}$.

○ Un versore normale ad S nel punto $P_o = (2, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2})$ è $\quad \underline{n} = (\frac{2}{\sqrt{7}}, -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}, -\frac{3}{2\sqrt{7}})$

○ Un versore normale ad S nel punto $P_o = (2, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2})$ è $\quad \underline{n} = (-\frac{2}{\sqrt{7}}, -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}, \frac{3}{2\sqrt{7}})$

Esame del 31 marzo 2015

Esercizio 1. Si consideri la curva C sul piano yz di equazione $\rho = e^{-\theta/2}\,,\ \theta \in [0, \pi]$, essendo (ρ, θ) le usuali coordinate polari centrate in $(0, 0)$.
a) Dopo averne disegnato sul piano yz la traccia, determinare la lunghezza di C.
b) Sia S la superficie generata dalla rotazione di C di 2π attorno all'asse y. Calcolare l'area di S.
c) Calcolare il volume del solido V racchiuso da S.
Esercizio 2. È dato il seguente campo vettoriale

$$F(x, y) = \left(\frac{bx}{ax^2 + y^2 + 1}\,, \frac{y}{ax^2 + y^2 + 1} \right), \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

i) Determinare il dominio I di F al variare di a, b e stabilire per quali valori di tali parametri F è conservativo in I.
ii) Per i valori dei parametri per cui F è conservativo nel suo dominio, determinare tutti i potenziali di F in I.
iii) Se γ è la curva di rappresentazione parametrica $r(t) = (\sqrt{2}\,\cos^3 t, \sin t)$, $t \in [0, \pi]$, nel caso in cui $a = b \in \mathbb{R}$, calcolare, se esiste, $\displaystyle\int_\gamma F$.

Esercizio 3. È dato il seguente sistema differenziale $\begin{cases} x'(t) = k\,y(t) \\ y'(t) = k\,x(t) - y(t) + e^t \end{cases}$, $\quad k \in \mathbb{R}$.

a) Per ogni $k \in \mathbb{R}$ calcolare la dimensione dello spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato infinitesime per $t \to +\infty$.
b) Sia ora $k = \sqrt{2}$. Calcolare tutte le soluzioni del sistema completo.

Esame del 15 giugno 2015

Esercizio 1. Sia $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + (y - 1)^2 - 2 \leq z \leq 1 - x^2 - (y + 1)^2\,\}$.
1) Calcolare il volume di V.
2) Determinare, se esiste, il versore normale alla superficie S, frontiera di V, nel punto $P_o = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, -\frac{2}{3}\right)$, stabilendo se è rivolto verso l'interno o l'esterno di S.
Esercizio 2. Si consideri il seguente sistema differenziale:

$$Y'(x) = A \cdot Y(x) + B(x)\,, \text{ con } Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } B(x) = \begin{pmatrix} -x \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Determinare una matrice fondamentale del sistema omogeneo associato.
b) Calcolare, se esistono, tutte le soluzioni del sistema dato tali che $Y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

1) Sono dati il campo vettoriale piano $\underline{F}(x,y) = \dfrac{1}{(x-y)^2}\,(x^2-2xy+y,\, x^2-x)$ e la curva C di rappresentazione parametrica $r(t) = (-3\sin(t/2), \cos t)$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

○ $\int_C F = 1 + \dfrac{3}{\sqrt{2}}$

○ $\int_C F = -1 - \dfrac{3}{\sqrt{2}}$

○ Il dominio di $\underline{F}$ è un insieme semplicemente connesso e connesso.

○ Un potenziale g di $\underline{F}$ tale che $g(2,-2) = g(\frac{3}{2}, 0)$ è dato da $\quad g(x,y) = \dfrac{x-x^2}{x-y}$

==

2) Sia A la regione del piano xy delimitata dalle rette di equazione $x = 0$, $x - y = 1$ e dalla curva di equazione $\rho = e^{-\theta}$, $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, ove (ρ, θ) sono le usuali coordinate polari centrate in $(0,0)$.

○ L'area di A vale $\quad \dfrac{3-e^{-\pi}}{4}$

○ L'area di A vale $\quad \dfrac{3+e^{-\pi}}{4}$

○ La lunghezza della frontiera di A vale $\quad e^{-\pi/2}(\sqrt{2}-1) + 1 + 2\sqrt{2}$

○ La lunghezza della frontiera di A vale $\quad e^{-\pi/2}(\sqrt{2}+1) + 1 + 2\sqrt{2}$

==

3) Siano $\underline{F}(x,y,z) = (x^2, x+y, x-y)$, $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \le 1, -4 \le z \le x+y\}$, S la frontiera di V e $T = S \cap \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \ge -3\}$.

○ Il flusso di $\underline{F}$ uscente da S vale: $\quad 2\,\pi$

○ Il flusso di $\underline{F}$ uscente da S vale: $\quad \dfrac{5}{2}\,\pi$

○ Il flusso di rot $\underline{F}$ attraverso T nella direzione del versore normale uscente da S vale: $\quad 0$

○ Il flusso di rot $\underline{F}$ attraverso T nella direzione del versore normale uscente da S vale: $\quad \pi$

==

4) Nel piano xz è data la curva γ di equazione cartesiana $z = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $x \in [-1, 1]$. Sia S la superficie generata dalla rotazione completa di γ attorno all'asse x.

○ Un versore normale ad S nel punto $P_o = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ è $\quad \underline{n} = (0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$

○ Un versore normale ad S nel punto $P_o = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ è $\quad \underline{n} = (0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$

○ L'equazione del piano tangente ad S in $P_o = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ è: $\quad \sqrt{2}\,y + 2\sqrt{2}\,z = 3.$

○ L'equazione del piano tangente ad S in $P_o = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ è: $\quad \dfrac{1}{\sqrt{2}}y + \sqrt{2}z = \dfrac{3}{2}.$

5) È dato il seguente problema differenziale:

$$x^2\, y''(x) + y(x) = e^{-x}\,, \qquad y(\alpha) = \beta$$

○ Se $\alpha = 0$, $\beta = 2$, il problema ha un'unica soluzione definita in un opportuno intorno di $x_o = 0$.

○ Il problema dato è equivalente a

$$\begin{cases} x^2\, z'(x) + y(x) = e^{-x} \\ y'(x) = z(x) \end{cases}$$

○ Se $\alpha = -1$, $\beta = 0$ ed $y'(-1) = 0$, il problema ha un'unica soluzione definita almeno in $(-\infty, 0)$, che presenta in $x_o = -1$ un punto di minimo relativo.

○ Se $\alpha = -1$, $\beta = 0$ ed $y'(-1) = 0$, il problema ha un'unica soluzione definita almeno in $(-\infty, 0)$, che presenta in $x_o = -1$ un punto di flesso.

Esame del 3 luglio 2015

Esercizio 1. Siano $A = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + z^2 \geq 1,\ x^2 + 4z^2 \leq 4,\ x \geq 0,\ z \geq 0\}$, T il solido ottenuto ruotando A di 2π attorno all'asse x ed S la frontiera di T.

1) Calcolare, se esiste, $\displaystyle\iiint_T x\, dxdydz$.

2) Determinare, se esiste, il versore normale uscente da S nel punto $P_o = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

Esercizio 2. Si consideri il seguente campo di forze:

$$\underline{F}(x, y) = \left(\frac{k(x+2)}{x^2 + y^2 + 4(x+y) + 8} + \ln(y - x + a), \frac{y+2}{x^2 + y^2 + 4(x+y) + 8} - \ln(y - x + a)\right), k, a \in \mathbb{R}.$$

i) Rappresentare, al variare di a e k, il dominio D di F, stabilendo se D è connesso e/o semplicemente connesso.

ii) Determinare, se possibile, i valori di a e k per cui F è conservativo in D.

iii) Se $k = 1$ ed $a = 0$, calcolare, se esiste, $\displaystyle\int_C F$, dove $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 4 - x^2,\ \text{con } -2 \leq x \leq 0\}$, orientata in senso orario.

==

1) Sono dati il campo $\underline{F}(x, y, z) = \left(\dfrac{xz}{x^2 + y^2 + 2y}, \dfrac{z(1+y)}{x^2 + y^2 + 2y}, \ln(\sqrt{x^2 + y^2 + 2y}\,)\right)$ e il solido $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3 \leq x^2 + y^2 + 2y \leq 8,\ |z| \leq 1\}$.

○ Il flusso uscente dalla frontiera di V vale π

○ Il flusso uscente dalla frontiera di V vale 0

○ $\displaystyle\iiint_V \frac{1}{2(x^2 + y^2 + 2y)^2}\, dxdydz = \pi\, \ln(8)$

○ $\displaystyle\iiint_V \frac{1}{2(x^2 + y^2 + 2y)^2}\, dxdydz = \frac{5}{6}\pi$

==

2) Sia γ la curva sul piano $x\,y$ di equazione $\rho = \sin^2(\theta)$, $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, ove (ρ, θ) sono le usuali coordinate polari centrate in $(0, 0)$.

○ La lunghezza di γ è $\quad 1+\dfrac{\sqrt{3}}{6}\,\ln(2+\sqrt{3})$

○ La lunghezza di γ è $\quad 1+\dfrac{\sqrt{6}}{3}\,\ln(2+\sqrt{3})$

○ L'equazione della retta tangente a γ nel punto $P_o=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{8},\dfrac{1}{8}\right)$ è $\quad y=\dfrac{1}{8}+\dfrac{\sqrt{3}}{5}\,(x-\dfrac{\sqrt{3}}{8})$

○ L'equazione della retta tangente a γ nel punto $P_o=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{8},\dfrac{1}{8}\right)$ è $\quad y=\dfrac{1}{8}+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\,(x-\dfrac{\sqrt{3}}{8})$

==

3) Siano $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ un campo vettoriale conservativo e di classe C^1, $F=(f_1,f_2)$ e $G:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ il campo vettoriale $G(x,y)=(f_1(x,y)-f_2(x,y),\ f_1(x,y)+f_2(x,y))$. $\quad G$ è conservativo se:

○ $\dfrac{\partial f_1}{\partial x}(x,y)=-\dfrac{\partial f_2}{\partial y}(x,y)$

○ $\dfrac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)=-\dfrac{\partial f_2}{\partial x}(x,y)$

○ $\dfrac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)=\dfrac{\partial f_2}{\partial x}(x,y)$

○ $\dfrac{\partial f_1}{\partial x}(x,y)=\dfrac{\partial f_2}{\partial y}(x,y)$

==

4) Sia $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: z=\dfrac{1}{2}\,(x^2+4y^2),\ x^2+4y^2\le 12\}$.

○ Un versore normale ad S nel punto $P_o=(2,1,4)$ è $\quad \underline{n}=\left(\dfrac{2}{\sqrt{21}},-\dfrac{4}{\sqrt{21}},\dfrac{1}{\sqrt{21}}\right)$

○ Un versore normale ad S nel punto $P_o=(2,1,4)$ è $\quad \underline{n}=\left(-\dfrac{2}{\sqrt{21}},-\dfrac{4}{\sqrt{21}},\dfrac{1}{\sqrt{21}}\right)$

○ L'equazione del piano tangente ad S in $P_o=(2,1,4)$ è: $\quad z-2x+4y=4$

○ L'equazione del piano tangente ad S in $P_o=(2,1,4)$ è: $\quad 2z-x-y=5$

==

5) È dato il seguente sistema differenziale:

$$\begin{cases} x'(t)=k\,y(t)\\ y'(t)=-x(t)-(k^2-4)\,y(t)+\sqrt[3]{t}\end{cases}\quad ,\ k\in\mathbb{R}$$

○ Se $k=0$ una matrice fondamentale del sistema omogeneo associato al sistema dato è

$$\mathbf{\Phi}(t)=\begin{pmatrix} 3 & -1\\ \frac{3}{4} & e^{4t}\end{pmatrix}$$

○ Se $k<2$ tutte le soluzioni del sistema omogeneo associato al sistema dato sono limitate in $\mathbb{R}$.

○ Se $k=0$ la dimensione dello spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato limitate in $\mathbb{R}$ è 1.

○ Se $k=-2$ un'equazione differenziale scalare del secondo ordine equivalente al sistema dato è

$$x''(t)-2\,x(t)=3\,\sqrt[3]{t}$$

Esame del 14 settembre 2015

Esercizio 1. Sul piano cartesiano xz è data la curva C di rappresentazione parametrica
$r(t) = (\sin t, 1 - \cos(t/2))$, $t \in [0, \pi]$.

1) Determinare se la curva è regolare, disegnarne la traccia e calcolare l'area della regione A compresa tra l'asse z e la traccia di C.
2) Sia ora S la superficie ottenuta ruotando C di 2π attorno all'asse z. Dare una parametrizzazione di S e calcolare il flusso uscente da S del campo vettoriale $\underline{F}(x, y, z) = (1, -1, 1 - z)$.

Esercizio 2. Si consideri il seguente campo di forze:

$$\underline{F}(x, y) = \left(\frac{ax}{x^2 + 2y^2 - 1}, \frac{2y + b}{x^2 + 2y^2 - 1} \right), \ a,\ b \in \mathbb{R}.$$

i) Dopo aver determinato e disegnato il dominio D di F, precisandone la connessione e/o la semplice connessione, stabilire per quali valori di a e b il campo F è conservativo in D.
ii) Per i valori di a e b determinati al punto i), calcolare, se esiste, il lavoro di F lungo la curva di rappresentazione parametrica $r(t) = (10 + t\, \cos t, t\, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$.
iii) Sempre per i valori di a e b determinati al punto i), determinare, se esistono, tutti i potenziali di F in D.

==

1) È dato il solido $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y \le z \le 1,\ y \ge 0,\ x^2 + y^2 \le 1\}$.

- ◯ Il volume di V vale $\pi - \dfrac{2}{3}$
- ◯ Il volume di V vale $\dfrac{1}{2}\pi - \dfrac{2}{3}$
- ◯ $\displaystyle\iiint_V z\, dxdydz = \frac{1}{16}\pi$
- ◯ $\displaystyle\iiint_V z\, dxdydz = \frac{1}{8}\pi$

==

2) Sia γ la curva sul piano $x\,y$ di rappresentazione parametrica $r(t) = (t - t^3,\ \sqrt{3}\,t^2)$, $t \in [-1, 1]$.

- ◯ La traccia della curva è simmetrica rispetto all'asse x
- ◯ Il versore tangente a γ nel punto $P_o = \big(0,\ \sqrt{3}\big)$ esiste e vale $\left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$
- ◯ Il versore tangente a γ nel punto $P_o = \big(0,\ \sqrt{3}\big)$ esiste e vale $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$
- ◯ La lunghezza di γ è 4

==

3) È data la seguente equazione differenziale:

$$x^2\, y''(x) - 2\,x\,y'(x) + 2\,y(x) = x^4$$

◯ L'equazione è equivalente al seguente sistema differenziale

$$\begin{cases} y'(x) = z(x) \\ z'(x) = -\dfrac{2}{x^2}\, y(x) + \dfrac{2}{x}\, z(x) + x^2 \end{cases}$$

◯ Le funzioni $y(x) = C\, x + (x-1)^2 + x^4,\ C \in \mathbb{R},$ sono soluzioni dell'equazione differenziale.

◯ L'insieme delle soluzioni dell'equazione differenziale tali che $y(0) = 0$ costituiscono uno spazio vettoriale di dimensione 1.

◯ Nessuna delle risposte precedenti è esatta.

===

4) Siano $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0\}$, T la frontiera di V, $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0\}$ ed $\underline{F}(x,y,z) = (x,\ y,\ z)$.

◯ Il flusso del campo $\underline{F}$ attraverso S nella direzione del versore normale ad S con componente lungo l'asse z positiva vale $-\dfrac{\pi}{2}$

◯ Il flusso del campo $\underline{F}$ attraverso S nella direzione del versore normale ad S con componente lungo l'asse z positiva vale $\dfrac{\pi}{3}$

◯ Il flusso del campo $\underline{F}$ uscente da T vale $\dfrac{\pi}{2}$

◯ Il flusso del campo $\underline{F}$ uscente da T vale π

===

5) Siano $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 1,\ x^2+(y-1)^2 \le 2\}$ ed $f(x,y) = \dfrac{x\,y}{x^2+y^2}$.

◯ $\displaystyle\iint_A f(x,y)\, dxdy$ non esiste reale

◯ $\displaystyle\iint_A f(x,y)\, dxdy = \frac{3\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{2}$

◯ L'area di A vale $\pi - 1$

◯ L'area di A vale $\dfrac{3}{4}\pi$

Esame del 28 ottobre 2015

Esercizio 1. Sia $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ la curva sul piano xy di rappresentazione parametrica

$$\gamma(t) := \begin{cases} (\cos t, \sin t) & \text{se } t \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ (-\frac{2}{\pi}t + 1, (-\frac{2}{\pi}t + 2)^2) & \text{se } t \in (\frac{\pi}{2}, \pi] \\ (\frac{2}{\pi}t - 3, 0) & \text{se } t \in (\pi, 2\pi] \end{cases}$$

1) Disegnare la traccia di γ, dopo aver provato che la curva è chiusa e regolare a tratti. Calcolarne poi la lunghezza.

2) Detta A la porzione del piano xy racchiusa da γ, calcolare il volume del solido V generato dalla rotazione completa di A attorno all'asse x.

Esercizio 2. È dato il seguente sistema differenziale:

$$\begin{cases} y_1'(x) = y_1(x) + \alpha\, y_2(x) + f(x) \\ y_2'(x) = y_1(x) + \alpha\, y_2(x) \end{cases}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

i) Determinare, se esistono, i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui tutte le soluzioni del sistema omogeneo associato sono limitate in $[0, +\infty)$.
ii) Siano ora $\alpha = 1$ ed $f(x) = e^{2x}$. Calcolare tutte le soluzioni del sistema completo tali che $y_1(0) = 1,\ y_2(0) = 0$.

==

1) Siano $A = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 : z \geq y^3,\ z \leq \sqrt{y}\}$ e V il solido ottenuto dalla rotazione completa di A attorno all'asse z.

○ Il volume di V vale $\dfrac{2}{5}\pi$

○ Il volume di V vale $\dfrac{5}{12}\pi$

○ L'area di A vale $\dfrac{2}{5}$

○ L'area di A vale $\dfrac{3}{12}$

==

2) Sia S la superficie di equazione cartesiana $y = (x-1)^2 + z^2$.

○ Il piano tangente a S nel punto $P_o = (2,2,1)$ esiste e ha equazione $-2x + 2y + z = 1$

○ Il piano tangente a S nel punto $P_o = (2,2,1)$ esiste e ha equazione $x - 2y + 2z = 0$

○ Il versore normale ad S nel punto $P_o = (2,2,1)$, con componente lungo l'asse z positiva, esiste ed è $\underline{n} = \left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$

○ Il versore normale ad S nel punto $P_o = (2,2,1)$, con componente lungo l'asse z positiva, esiste ed è $\underline{n} = \left(\dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$

==

3) Siano $\begin{cases} y_1'(x) = 3\,y_1(x) - y_2(x) \\ y_2'(x) = y_1(x) + y_2(x) \end{cases}$ e $z(t) = y_1(2t),\ v(t) = y_2(\frac{t}{2}),\ w(t) = y_1(-t),\ s(t) = y_2(3t)$.

○ Il sistema soddisfatto da z e da v è

$$\begin{cases} z'(t) = 3\,z(t) - v(2t) \\ v'(t) = \dfrac{1}{2}\,z\left(\frac{t}{2}\right) + \dfrac{1}{2}\,v(t) \end{cases}$$

○ Il sistema soddisfatto da z e da v è

$$\begin{cases} z'(t) = 6\,z(t) - 2\,v(4t) \\ v'(t) = \dfrac{1}{2}\,z\left(\frac{t}{4}\right) + \dfrac{1}{2}\,v(t) \end{cases}$$

◯ Il sistema soddisfatto da w e da s è

$$\begin{cases} w'(t) = 3\,w(t) - s(\frac{t}{3}) \\ s'(t) = w(-3t) + s(t) \end{cases}$$

◯ Il sistema soddisfatto da w e da s è

$$\begin{cases} w'(t) = -3\,w(t) + s\big(-\frac{t}{3}\big) \\ s'(t) = w(3t) - 3\,s(-t) \end{cases}$$

==

4) Siano γ la curva sul piano xy di rappresentazione parametrica $r(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$ ed $\underline{F}(x,y) = \left(\frac{ax+by}{2x^2+y^2-1}, \frac{cy}{2x^2+y^2-1}\right)$, $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$.

◯ Se $b = 0$, $a = 2k$, $c = k$, con $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, F è conservativo nel suo dominio.

◯ Se $b = 0$, $a = 1$, $c = 1$, F è conservativo nel suo dominio.

◯ Se $b = 0$, $a = 2k$, $c = k$, con $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, si ha: $\displaystyle\int_\gamma F = 0$

◯ Se $b = 0$, $a = 1$, $c = 1$, si ha: $\displaystyle\int_\gamma F = 0$

==

5) Sia $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x-1)^2 + y^2 \leq 1,\ -x^2 \leq z \leq 2 - x - y\}$.

◯ $\displaystyle\iiint_V x\ dxdydz = \frac{5}{2}\pi$

◯ $\displaystyle\iiint_V x\ dxdydz = \frac{2}{5}\pi$

◯ $\displaystyle\iiint_V y\ dxdydz = \frac{\pi}{8}$

◯ $\displaystyle\iiint_V y\ dxdydz = \frac{1}{4}\pi$

Esame del 15 gennaio 2016

Esercizio 1. Sia C la curva sul piano xz con rappresentazione parametrica

$$r(t) = (3 + 2\cos t,\ \sin t),\ t \in [0, 2\pi]$$

ed S la superficie ottenuta dalla rotazione completa di C attorno all'asse z.
a) Determinare una rappresentazione parametrica per S e stabilire se tale superficie è regolare.
b) Calcolare, se esiste, l'equazione del piano tangente ad S nel punto $P_o = (2, 2\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ e dare una formula per il calcolo dell'area di S.
c) Determinare il flusso del campo vettoriale $\underline{F}(x,y,z) = (x,\ x^2 z,\ -\frac{3\,z}{\sqrt{x^2+y^2}})$ uscente da S.

Esercizio 2. Si consideri il seguente problema:

$$(*)\quad \begin{cases} y''(x) + 4\,y'(x) + 4 = e^{-2\,x} + \dfrac{1}{x^2} \\ y(\frac{1}{2}) = -\dfrac{1}{4e},\ y'(\frac{1}{2}) = \dfrac{1}{2e} \end{cases}$$

a) Verificare che ha un'unica soluzione e determinarne il dominio.

b) Scrivere un sistema differenziale con relativi dati iniziali equivalente a $(*)$ ed una matrice fondamentale del sistema omogeneo associato.

c) Calcolare la soluzione di $(*)$.

==

1) Siano $\gamma : [-1,0] \to \mathbb{R}^2$ la curva di rappresentazione $\gamma(t) = (3\,t - 2\,t\,e^{2\,t^2+2\,t},\ e^{2\,t^2+2\,t} + 2\,t)$ ed $\underline{F}$ il campo vettoriale definito da $\underline{F}(x,y) = (12\,x^3\,y + 12\,x^2\,y^2 + 10\,x\,y^3 - 6\,y^4,\ 3\,x^4 + 8\,x^3\,y + 15\,x^2\,y^2 - 24\,x\,y^3)$.

○ $\displaystyle\int_\gamma F = -6$

○ $\displaystyle\int_\gamma F = 6$

○ Il potenziale g di $\underline{F}$ tale che $g(-1,1) = -1$ è : $\quad g(x,y) = 3\,x^4\,y^2 + 4\,x^3\,y + 5\,x^2\,y^3 - 6\,x^2\,y^4 + 1$

○ Il potenziale g di $\underline{F}$ tale che $g(-1,1) = 0$ è : $\quad g(x,y) = 3\,x^4\,y^2 + 4\,x^3\,y + 5\,x^2\,y^3 - 6\,x^2\,y^4 + 2$

==

2) Siano $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1\}$, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x \le 0,\ -\sqrt{1-x^2} \le y \le 0\}$ ed $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f(x,-y) = f(-x,y) = f(x,y)\ \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Si ha:

○ $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dxdy = 3 \iint_{A\setminus D} f(x,y)\,dxdy$

○ $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dxdy = \frac{1}{2} \iint_{A\setminus D} f(x,y)\,dxdy$

○ $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dxdy = 2 \iint_{A\setminus D} f(x,y)\,dxdy$

○ $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dxdy = \frac{1}{3} \iint_{A\setminus D} f(x,y)\,dxdy$

==

3) Sia $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \ge 0,\ 0 \le y \le 1 - x,\ 0 \le z \le 3(x^2+y^2)\}$.

○ Il volume di V vale 1

○ Il volume di V vale 2

○ $\displaystyle\iiint_V 3\,dxdydz = 6$

○ $\displaystyle\iiint_V 3\,dxdydz = \frac{3}{2}$

4) Siano $f(x,y) = \dfrac{x\,y}{x^2+y^2}$ e γ la curva orientata negativamente, la cui traccia è la frontiera di $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, x \geq 0\,, \, x^2+y^2 \geq 1\,, \, x^2+y^2 \leq 4\}$

○ $\displaystyle\int_\gamma f(x,y)\,ds = \frac{3}{4}$

○ $\displaystyle\int_\gamma f(x,y)\,ds = -\frac{3}{4}$

○ $\displaystyle\int_\gamma f(x,y)\,dx = \frac{2}{3}$

○ $\displaystyle\int_\gamma f(x,y)\,dx = 0$

==

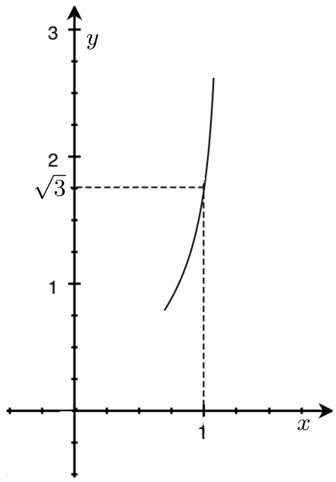
5) È dato il problema differenziale:

$$(o) \quad \begin{cases} y'(x) = \dfrac{1}{x}\, y(x) - y^3(x) \\ y(1) = \sqrt{3} \end{cases}$$

○ La soluzione di (o) è concava in un opportuno intorno di $x_o = 1$.

○ La soluzione di (o) è definita in $(0, +\infty)$

○ La soluzione di (o) ha il seguente grafico locale:



○ La soluzione y di (o) è tale che $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} y(x) = 0$

Esame del 15 febbraio 2016

Esercizio 1. Siano $A = \{(x,z) \in \mathbb{R} : \sqrt{x} \geq 2\,z,\ z \geq x^2 - \dfrac{1}{2}\}$ e V il solido ottenuto dalla rotazione completa di A attorno all'asse z.

a) Determinare le coordinate del baricentro di V, supposto omogeneo.

b) Siano ora S la frontiera di V, $T = S \cap \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq -\dfrac{1}{3}\}$ ed F il campo vettoriale $\underline{F}(x,y,z) = (y,\, -x,\, e^{xy})$. Calcolare il flusso di $\operatorname{rot}\underline{F}$ attraverso T.

Esercizio 2. Sia

$$\underline{F}(x,y) = \left(\frac{x+y+a}{x+y-1} + \frac{2\,x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \,,\, \frac{1}{x+y-1} + \frac{x\,y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right), \ a \in \mathbb{R}$$

i) Disegnare il dominio D di $\underline{F}$ e stabilire se D è aperto, connesso e/o semplicemente connesso.

ii) Determinare, se esiste, il valore di $a \in \mathbb{R}$ per cui il campo vettoriale è conservativo in D e, per tale valore di a, calcolare tutti i potenziali di $\underline{F}$.

==

1) Sia γ la curva sul piano xy di rappresentazione parametrica $r(t) = (t\,\cos t,\, t\,\sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$ ed A il dominio piano delimitato da γ e dal segmento sull'asse $y = 0$ con $x \in [0, 2\pi]$.

- ◯ L'area di A vale $\dfrac{2}{3}\,\pi^3$
- ◯ L'area di A vale π^3
- ◯ L'area di $A \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0\}$ è $\dfrac{13}{24}\,\pi^3$
- ◯ L'area di $A \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0\}$ è $\dfrac{\pi^3}{2}$

==

2) Siano $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1,\ y \leq x\}$ ed $f(x,y) = \dfrac{x}{1+x^2+y^2}$. Si ha:

- ◯ $\displaystyle\iint_A f(x,y)\,dxdy = \sqrt{2}\,\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$
- ◯ $\displaystyle\iint_A f(x,y)\,dxdy = 2\,\left(1 - \frac{\pi}{2}\right)$
- ◯ $\displaystyle\iint_A f(x,y)\,dxdy = \sqrt{2}\,\left(1 - \frac{\pi}{2}\right)$
- ◯ $\displaystyle\iint_A f(x,y)\,dxdy = 2\,\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$

==

3) Dato il sistema differenziale:

$$\begin{cases} y_1'(x) = y_1(x) + \alpha^2\,y_2(x) \\ y_2'(x) = \dfrac{1}{\alpha}\,y_1(x) + \alpha\,y_2(x) + e^{-x} \end{cases}, \ \alpha \in \mathbb{R}$$

- ◯ Tutte le soluzioni sono limitate in $[0, +\infty)$ se $\alpha < 0$
- ◯ Tutte le soluzioni sono limitate in $[0, +\infty)$ se $\alpha < -1$
- ◯ Tutte le soluzioni sono limitate in $(-\infty, 0]$ se $\alpha > 0$
- ◯ Tutte le soluzioni sono limitate in $(-\infty, 0]$ se $\alpha > 1$

4) Sono dati il campo vettoriale $\underline{F}(x,y,z) = (-x\,e^{xy},\, y\,e^{xy},\, (9-z)\,xy\,e^{xy})$, S la superficie definita da $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 9 - e^{-xy},\ -2 \le x \le 0,\ 0 \le y \le -3x\}$ ed $\underline{n}$ il versore normale ad S, con componente lungo l'asse z positiva. Allora:

○ $\displaystyle\int_S F \cdot n\, dS = -6$

○ $\displaystyle\int_S F \cdot n\, dS = 18$

○ $\displaystyle\int_S F \cdot n\, dS = -18$

○ $\displaystyle\int_S F \cdot n\, dS = 0$

==

5) Sia $Y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ la soluzione del seguente problema di Cauchy:

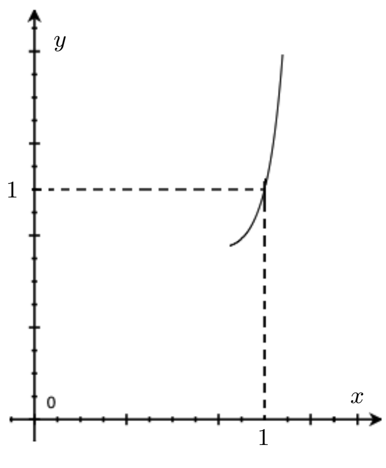
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 3\,x(t) + y(t), & x(1) = 2 \\ \dot{y}(t) = -x(t) + y(t), & y(1) = 0 \end{cases},$$

dove $\dot{x}$ e $\ddot{x}$ indicano rispettivamente la derivata prima e seconda di x rispetto a t.
Posto $v(t) = e^{x(t)y(t)}$, si ha:

○ $\ddot{v}(1) = 24$

○ $\ddot{v}(1) = -24$

○ Il grafico locale della funzione v è:



○ $\dot{v}(1) = -2$

Esame del 23 marzo 2016

Esercizio 1. Si consideri sul piano xz la curva C di equazione $\rho = 1 - \sin t$, con $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, dove ρ e t rappresentano le usuali coordinate polari centrate in $(0, 0)$.
Sia S la superficie generata dalla rotazione di C di 2π attorno all'asse z.
a) Dare una parametrizzazione di tale superficie e calcolare l'area di S.
b) Calcolare il flusso uscente da S del campo vettoriale

$$\underline{F}(x, y, z) = \left(x + y^2 z, e^{x\,\sin z} + y, z + \arctan(x\,e^y)\right).$$

Esercizio 2. È dato il seguente campo vettoriale piano

$$F(x, y) = \left(\frac{1}{\sqrt{x+4}} + e^{-2x}\,\varphi(y)\,,\, e^{-2x}\,\frac{y}{\sqrt{1-y^2}} \right),$$

dove $\varphi \in C^1$ in $(-1, 1)$.
a) Determinare φ tale che $\varphi(0) = 2$ e per cui F è conservativo nel suo dominio.
b) Per la φ trovata al punto precedente, calcolare, se esistono, $\displaystyle\int_{\gamma_1} F$, dove γ_1 è il segmento con punto iniziale $P_o = (-\lg 3, 0)$ e punto finale $P_1 = (\lg 2, \sqrt{3})$ e $\displaystyle\int_{\gamma_2} F$, dove γ_2 è la curva di rappresentazione parametrica $r(t) = (3\,\cos t, \frac{1}{4}\,\sin t)$, $t \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\,\pi]$.

Esercizio 3. È dato il seguente problema differenziale $\begin{cases} y'(x) = \dfrac{x}{x^2-1}\,y(x) - \dfrac{2\,x}{(x^2-1)\,y(x)} \\ y(0) = -1 \end{cases}$

a) Verificare che il problema ha un'unica soluzione locale.
b) Determinare la soluzione del problema, precisandone il dominio.

Esame del 10 giugno 2016

Esercizio 1. Siano $A = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ z \geq 0,\ z^2 - x^2 \leq 1,\ z \geq 2\,x\}$ una lamina omogenea e V il solido ottenuto dalla rotazione completa di A attorno all'asse x.
a) Calcolare le coordinate del baricentro di V.
b) Stabilire se esiste e, in caso affermativo, determinare l'equazione del piano tangente alla superficie S, frontiera di V, nel punto $P = \left(\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$.

Esercizio 2. È dato il seguente problema differenziale:

$$\begin{cases} y'(x) = -\dfrac{2\,y(x)}{x\,\ln x} + 2\,\sqrt{y(x)} \\ y(e) = 1 \end{cases}$$

a) Verificare che esiste un'unica soluzione del problema in un intorno di $x_o = e$.
b) Determinare tale soluzione, precisandone il dominio.

1) Siano Q il quadrato sul piano xz di vertici $(0,0)$, $(2,2)$, $(4,0)$ e $(2,-2)$ e T il solido ottenuto ruotando Q di 2π attorno all'asse z.

◯ L'area della frontiera di T vale $32\,\pi$

◯ L'area della frontiera di T vale $32\sqrt{2}\,\pi$

◯ Il volume di T è $16\,\pi$

◯ Il volume di T è $32\sqrt{2}\,\pi$

===

2) Sia γ la curva sul piano xy di rappresentazione parametrica $r(t) = (\cos^2 t,\, 3\,t)$, $t \in [0,\, \frac{3}{2}\,\pi]$. Si ha:

◯ L'area della regione di piano compresa tra il sostegno di γ e gli assi coordinati vale $\dfrac{9}{4}\,\pi$

◯ L'area della regione di piano compresa tra il sostegno di γ e gli assi coordinati vale $\dfrac{3}{4}\,\pi$

◯ L'equazione della retta tangente al sostegno di γ nel punto $\left(\dfrac{3}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ è $12\,x + \sqrt{3}\,y = 9 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,\pi$

◯ L'equazione della retta tangente al sostegno γ nel punto $\left(\dfrac{3}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ è $4\,x + 2\,y = 3 + \pi$

===

3) Dato il sistema differenziale:

$$\begin{cases} y_1'(x) = y_1(x) + \alpha\, y_2(x) \\ y_2'(x) = 2\,y_1(x) - 3\,y_2(x) \end{cases}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

◯ Tutte le soluzioni sono limitate in $[0, +\infty)$ se $\alpha \le -1$

◯ Tutte le soluzioni sono limitate in $[0, +\infty)$ se $\alpha > -4$

◯ Tutte le soluzioni sono infinitesime a $+\infty$ se $\alpha < -\dfrac{3}{2}$

◯ Tutte le soluzioni sono infinitesime a $+\infty$ se $\alpha > -2$

===

4) Sono dati il campo vettoriale $\underline{F}(x,y) = \left(-\dfrac{2\,y}{x^2 + 2\,y^2}, \dfrac{2\,x}{x^2 + 2\,y^2}\right)$, γ_1 la curva di equazione cartesiana $x^2 + y^2 = 1$ percorsa in senso orario, γ_2 la curva di equazione cartesiana $x^2 + y^2 = 4$ percorsa in senso antiorario e T il dominio piano compreso tra γ_1 e γ_2. Allora:

◯ F è conservativo nel suo dominio

◯ $\displaystyle\int_{+\partial T} F = 2\,\pi$

◯ $\displaystyle\int_{+\partial T} F = 0$

◯ $\displaystyle\int_{\gamma_1} F = \int_{\gamma_2} F$

5) Siano $\underline{F}(x,y,z) = x\,y\,\underline{i}$, $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq y\}$, T la frontiera di V ed $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = 1,\ 0 \leq z \leq y\}$

○ Il flusso di $\underline{F}$ uscente da T vale $\dfrac{\pi}{4}$

○ Il flusso di $\underline{F}$ uscente da T vale $\dfrac{\pi}{16}$

○ Il flusso di $\underline{F}$ attraverso S nella direzione del versore normale con componente j positiva vale $\dfrac{\pi}{2}$

○ Il flusso di $\underline{F}$ attraverso S nella direzione del versore normale con componente j positiva vale $\dfrac{\pi}{8}$

Esame del 7 luglio 2016

Esercizio 1. Siano S la superficie così definita: $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = \dfrac{1}{2}(x^2+2\,y^2),\ x^2+4\,y^2 \leq 8\}$ ed F il campo vettoriale di componenti $F(x,y,z) = (x, x\,y, z)$.

a) Calcolare l'area di S.

b) Calcolare il flusso di F attraverso S nella direzione del versore normale con componente lungo l'asse z negativa.

Esercizio 2. Sia F il seguente campo vettoriale piano:

$$F(x,y) = \left(\frac{x^2}{1-x^2-y^2} - \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2-1),\ \frac{x\,y}{1-x^2-y^2} \right).$$

a) Stabilire se F è conservativo nel suo dominio.

b) Determinare, se esistono, tutti i potenziali di F nel suo dominio.

===

1) Siano $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq z \leq 3-2x\}$ ed $F(x,y,z) = (2x+z, y-x, 3z)$.

○ Il flusso di F uscente dalla frontiera di T vale $30\,\pi$

○ Il flusso di F uscente dalla frontiera di T vale $48\,\pi$

○ Il volume di T è $5\,\pi$

○ Il volume di T è $6\,\pi$

===

2) Dato il sistema differenziale: $\begin{cases} y'(x) = 2y(x) + z(x) + e^x \\ z'(x) = y(x) + 2\,z(x) + 1 \end{cases}$

○ Una matrice fondamentale del sistema omogeneo associato è: $\mathbf{\Phi}(x) = \begin{pmatrix} e^x & e^{3x} \\ -e^x & 2\,e^{3x} \end{pmatrix}$

○ L'insieme delle soluzioni del sistema dato è uno spazio vettoriale di dimensione 2.

○ Una soluzione del sistema dato è: $Y(x) = \begin{pmatrix} y(x) \\ z(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2}(x-1)\,e^x + \dfrac{1}{3} \\ -\dfrac{1}{2}x\,e^x - \dfrac{2}{3} \end{pmatrix}$

○ Una soluzione del sistema dato è: $Y(x) = \begin{pmatrix} y(x) \\ z(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2}x\,e^x + \dfrac{1}{3} \\ -\dfrac{1}{2}x\,e^x - \dfrac{2}{3} \end{pmatrix}$

3) Sia C la curva sul piano xy di rappresentazione parametrica $r(t) = (\cos t - \frac{\sin t}{2}, \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

○ L'area della regione di piano racchiusa da C vale π

○ L'area della regione di piano racchiusa da C vale 2π

○ La retta tangente al sostegno di C nel punto $P\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ ha equazione $2x + 2y = 1$

○ La retta tangente al sostegno di C nel punto $P\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ ha equazione $2x - 2y = 1$

==

4) Siano $F(x, y, z) = (xy, xz, yz)$, $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \geq 2z,\ -2 \leq z \leq 2 - \frac{x^2 + y^2}{2}\}$ ed $S = \partial T \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq -1\}$, dove ∂T indica la frontiera di T.

○ S è frontiera di un dominio normale di $\mathbb{R}^3$

○ Il flusso del rotore di F attraverso S nella direzione del vettore normale con componente lungo l'asse z positiva vale 6π

○ Il flusso del rotore di F attraverso S nella direzione del vettore normale con componente lungo l'asse z positiva vale -3π

○ Il flusso del rotore di F attraverso S nella direzione del vettore normale con componente lungo l'asse z negativa vale 6π

==

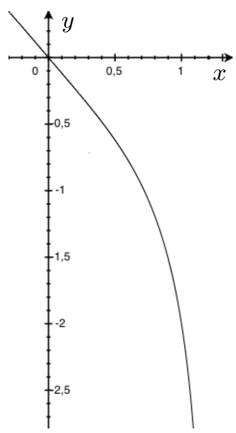
5) È dato il seguente problema differenziale:

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{y(x)}{x} + y^3(x)\cos x \\ y(x_o) = y_o \end{cases}$$

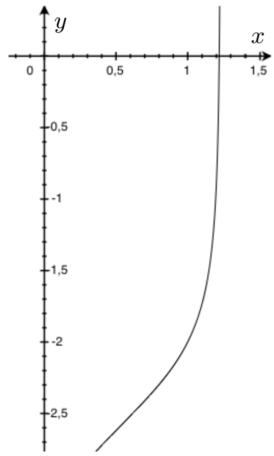
○ L'equazione ha un'unica soluzione in ogni intervallo del tipo $(x_o - \delta, x_o + \delta)$ con $\delta > 0$ opportuno e $x_o \in \mathbb{R}$

○ Se $(x_o, y_o) = (1, 0)$ il problema ha infinite soluzioni.

○ Se $x_o = 1$, $y_o = -2$ il grafico locale della soluzione del problema è:



○ Se $x_o = 1, y_o = -2$ il grafico locale della soluzione del problema è:



Esame del 12 settembre 2016

Esercizio 1. Sia T il solido ottenuto ruotando attorno all'asse z l'insieme

$$A = \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 : -2 + \sqrt{2\,x} \le z \le h\,(1 - \frac{x^2}{4}),\ x \ge 0\}\,,\ h > 0\,.$$

a) Calcolare il volume di T al variare di $h \in \mathbb{R}$, $h > 0$.
b) Determinare, se esiste, $h > 0$ in modo che il baricentro di T, supposto omogeneo, sia posizionato nell'origine delle coordinate.

Esercizio 2. Sia γ la curva di rappresentazione parametrica $r(t) = \big(x(t),\, y(t)\big), t \in [0, \frac{2}{3}\pi]$, dove x ed y sono le soluzioni del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t) - x(t)\,, & x(0) = 1 \\ \dot{y}(t) = y(t) - 10\,x(t)\,, & y(0) = 0 \end{cases}$$

a) Stabilire se la curva γ è regolare e chiusa.
b) Calcolare, se esiste, $\int_\gamma F$, dove $F(x,y) = \left(\frac{y}{x^2+y^2}, -\frac{x}{x^2+y^2}\right)$.

==

1) Sia $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2+y^2}{2} - 2 \le z \le -2\big(\sqrt{x^2+y^2} - 2\big)\} \cap \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \le 2\}$.

○ L'area della superficie S, frontiera di V, vale $\frac{2}{3}\,(1 + 19\,\sqrt{5})\,\pi$

○ L'area della superficie S, frontiera di V, vale $(1 + 19\,\sqrt{5})\,\pi$

○ Il piano tangente ad S nel punto $P(1,1,-1)$ ha equazione $x + y - z = 3$

○ Il piano tangente ad S nel punto $P(1,1,-1)$ ha equazione $x + y - 2\,z = 4$

2) Il flusso del campo vettoriale $F(x,y,z) = (2\,x, 2\,y, z - 2\,x^2 - 2\,y^2 + 1)$ attraverso la superficie $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2\,x^2 + 2\,y^2,\ x^2 + y^2 \leq 4\}$, orientata in modo che il versore normale al piano tangente a T formi un angolo acuto con il versore $\underline{k} = (0,0,1)$, vale

○ $60\,\pi$

○ $-92\,\pi$

○ $-60\,\pi$

○ 0

===

3) Sia C la curva sul piano xy di rappresentazione parametrica $r(t) = (\cos t, t\,\sin t)$, $t \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\,\pi]$.

○ La frontiera della regione D è regolare.

○ La retta tangente alla frontiera di D nel punto $P(-1,\,0)$ ha equazione $y - x = 1$

○ L'area della regione piana D delimitata da C e dall'asse y vale π^2

○ L'area della regione piana D delimitata da C e dall'asse y vale $\dfrac{\pi^2}{2}$

===

4) Si consideri il seguente problema differenziale: $\begin{cases} x\,y'(x) - y(x) = \dfrac{x^2 + y^2(x)}{y(x)} \\ y(x_o) = y_o \end{cases}$

○ Se $x_o \neq 0$, $y_o > 0$ il problema ha infinite soluzioni in un intorno di x_o.

○ Se $x_o = 1$, $y_o = 1$ il problema ha un'unica soluzione tale che $\lim_{x \to +\infty} y(x) = 0$.

○ Se $x_o = 1$, $y_o = 1$ il problema ha un'unica soluzione tale che $\lim_{x \to +\infty} y(x) = +\infty$.

○ Se $x_o < 0$, $y_o > 0$ il problema ha un'unica soluzione locale, crescente in un intorno di x_o.

===

5) Il campo vettoriale $F(x,y) = \big(3\,y - 2\,x\,|x - y^2|,\ 3\,|x+1| - 2\,x^2\,y\big)$ è conservativo nell'insieme

○ $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > y^2\}$.

○ $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < -1\}$.

○ $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x < y^2\}$.

○ $\mathbb{R}^2$.

Appello straordinario del 26 ottobre 2016

Esercizio 1. Sia $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1,\ \frac{1}{2} - \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 1 + x^2 + y^2\}$.

a) Calcolare, se esiste, $\iiint_V \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$.

b) Parametrizzare la frontiera di V.

c) Calcolare l'area della superficie $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1,\ z = 1 + x^2 + y^2\}$.

Esercizio 2. È dato il campo vettoriale piano F di componenti

$$F(x, y) = \left(-\frac{1}{y-x} + \frac{x}{\left(x^2 + (y-1)^2\right)^2},\ \frac{1}{y-x} + \frac{y-1}{\left(x^2 + (y-1)^2\right)^2} \right).$$

a) Disegnare l'insieme di definizione D di F e specificare se D è semplicemente connesso e/o connesso.
b) Valutare se F risulta conservativo in D e, se esistono, trovare tutti i potenziali di F in D.
c) Calcolare, se esistono, $\displaystyle\int_{\gamma_1} F$ e $\displaystyle\int_{\gamma_2} F$, dove γ_1 è la curva con rappresentazione parametrica $r_1(t) = \big(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos t,\ 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t\big),\ t \in [0, 2\pi]$ e γ_2 è la curva con rappresentazione parametrica $r_2(t) = \big(t,\ \frac{1}{2} + t^2\big),\ t \in [0, 1]$.

Esercizio 3. È dato il seguente problema differenziale: $\begin{cases} y'(x) = x\,y(x) + x\,\sqrt[4]{y(x)} \\ y(0) = 1 \end{cases}$

a) Verificare che esiste un'unica soluzione del problema in un intorno di $x_o = 0$.
b) Determinare tale soluzione, precisandone il dominio.

Esame del 17 gennaio 2017

Esercizio 1. Sia $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2\,y^2 + z^2 \leq 3,\ 0 \leq y \leq \sqrt{x^2 + z^2}\}$.
a) Calcolare il volume di T.
b) Determinare, se esiste, il versore normale uscente dalla frontiera di T nel punto $P_o = (1, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$.

Esercizio 2. Si consideri il seguente sistema differenziale:

$$(*) \begin{cases} y_1'(x) = k\,y_1(x) - y_2(x) \\ y_2'(x) = y_1(x) + 2\,y_2(x) + 1 \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R}$$

a) Per quali valori del parametro k il sistema omogeneo associato ha infinite soluzioni infinitesime a $+\infty$?
b) Sia ora $k = -\frac{1}{2}$. Determinare la soluzione del sistema dato tale che $y_1(0) = 0,\ y_2(0) = 0$.

==

1) Siano γ la curva sul piano xy di rappresentazione parametrica $r(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$, $t \in [0, \pi]$ ed S la superficie ottenuta ruotando γ di 2π attorno all'asse x.

◯ L'area di S vale $\frac{6}{5}\pi$

◯ L'area di S vale $\frac{12}{5}\pi$

◯ $\int_S (y^2 + z^2)\, dS = \frac{6}{11}\pi$

◯ $\int_S (y^2 + z^2)\, dS = \frac{10}{11}\pi$

2) Siano $A \subset \mathbb{R}^2$, A aperto e non vuoto, $F : A \to \mathbb{R}^2$ un campo vettoriale conservativo ed $f,\, g : A \to \mathbb{R}$ due potenziali di F su A. Si ha:

○ $f - g$ è costante in A

○ Per ogni $c \in \mathbb{R}$ la funzione $h(x,y) = f(x,y) - g(x,y) + c$ è un potenziale di F su A

○ $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y)$ per ogni $(x,y) \in A$

○ rot $(F - \nabla(g - f)) = 0$ in A

==

3) Siano $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - 5 \le z \le 6 - x^2 - y^2,\, x^2 + y^2 \le 4\}$ ed $F(x,y,z) = (2\,x + y, z^2\, e^x - y, \sin(xy) + z)$

○ $\displaystyle\iiint_V z\, dxdydz = -16\pi$

○ $\displaystyle\iiint_V z\, dxdydz = 28\pi$

○ Il flusso entrante attraverso la frontiera di V vale 56π

○ Il flusso entrante attraverso la frontiera di V vale 14π

==

4) Sia D il dominio racchiuso dalla curva di rappresentazione parametrica $r(t) = \left(4\left(t - t^2\right), t - t^3\right)$, $t \in [0,1]$. Allora:

○ $\displaystyle\iint_D y\, dxdy = \frac{1}{70}$

○ $\displaystyle\iint_D y\, dxdy = \frac{3}{70}$

○ $\displaystyle\iint_D x\, dxdy = \frac{1}{105}$

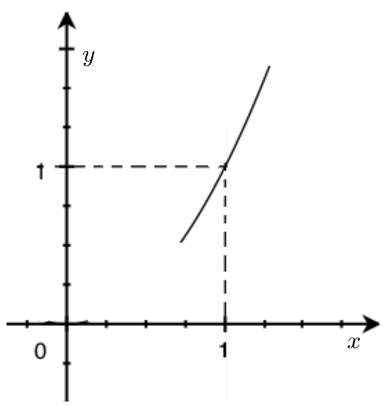
○ $\displaystyle\iint_D x\, dxdy = \frac{8}{105}$

==

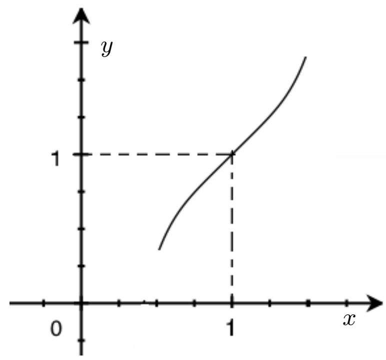
5) Si consideri il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x\,y'(x) = y(x) - x\,\ln x\,(1 + \ln x)\,y^2(x) \\ y(1) = \alpha \end{cases}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

○ Se $\alpha = 1$ il grafico locale della soluzione del problema è



○ Se $\alpha = 1$ il grafico locale della soluzione del problema è



○ Se $\alpha < 0$ la soluzione del problema è definita in $(0, +\infty)$

○ Se $\alpha > 0$ la soluzione del problema è definita in $(0, +\infty)$

Esame del 9 febbraio 2017

Esercizio 1. Sia C la curva sul piano xz di rappresentazione parametrica

$$r(t) := \begin{cases} (\sin t\,, 1 + \cos t) & \text{se } \ t \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ \left(\frac{2}{\pi}t\,, -\frac{2}{\pi}t + 2\right) & \text{se } \ t \in (\frac{\pi}{2}, \pi] \\ \left(4 - \frac{2}{\pi}t\,, -\frac{1}{2}\,(2 - \frac{2}{\pi}t)^2\right) & \text{se } \ t \in (\pi, 2\pi] \end{cases}$$

1) Disegnare la traccia di C e stabilire se la curva è regolare, giustificando la risposta.
2) Calcolare la lunghezza di C e l'area della superficie S, ottenuta dalla rotazione completa di C attorno all'asse z.
3) Calcolare il volume del solido V, di cui S è la frontiera.

Esercizio 2. Si consideri il seguente campo vettoriale piano:

$$F(x, y) = \left(\frac{2\,x\,y}{1 - x^2 - 4\,y^2}\,, \frac{8\,y^2}{1 - x^2 - 4\,y^2} - \ln(x^2 + 4\,y^2 - 1)\right)\,.$$

a) Disegnare il dominio I di F e stabilire se è connesso e/o semplicemente connesso.
b) Determinare se F è conservativo in I e, in caso affermativo, calcolare tutti i potenziali di F.
==

1) Sia T il seguente insieme:

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \, x^2 + y^2 - 4 \leq z \leq (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2\,\}$$

○ Il volume di T vale $\frac{32}{3}\pi$

○ Il volume di T vale $\frac{16}{3}\pi$

○ L'area della regione piana A, ottenuta intersecando T col piano yz, vale 8

○ L'area della regione piana A, ottenuta intersecando T col piano yz, vale 12

2) Sia S la superficie definita da:

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 4\,y^2 + 4\,z^2 = 4,\ y \geq z\}$$

○ Un versore normale ad S nel punto $P_o\left(1,\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{2}\right)$ risulta: $\underline{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{13}},\ -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{13}},\ \frac{2}{\sqrt{13}}\right)$

○ Un versore normale ad S nel punto $P_o\left(1,\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{2}\right)$ risulta: $\underline{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{13}},\ \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{13}},\ \frac{2}{\sqrt{13}}\right)$

○ Il piano tangente ad S nel punto $P_o\left(1,\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{2}\right)$ ha equazione: $2\,x - 2\sqrt{2}\,y + 2\,z = 1$

○ Il piano tangente ad S nel punto $P_o\left(1,\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{2}\right)$ ha equazione: $x - \sqrt{2}\,y - z = -\frac{1}{2}$

==

3) Siano $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1,\ 1 - x^2 - y^2 \leq z + 1 \leq x + y + 2\}$ ed $F(x,y,z) = (z, 2\,y, z)$.

○ Il flusso del rotore del campo vettoriale F attraverso T, dove T indica la superficie laterale di V, nella direzione del versore normale con componente $\underline{i}$ positiva, vale 0

○ Il flusso del rotore del campo vettoriale F attraverso T, dove T indica la superficie laterale di V, nella direzione del versore normale con componente $\underline{i}$ positiva, vale $2\,\pi$

○ Il flusso del campo vettoriale F uscente da S, dove S indica la frontiera di V vale $\frac{3}{2}\,\pi$

○ Il flusso del campo vettoriale F uscente da S, dove S indica la frontiera di V vale $\frac{9}{2}\,\pi$

==

4) Si consideri il seguente problema differenziale:

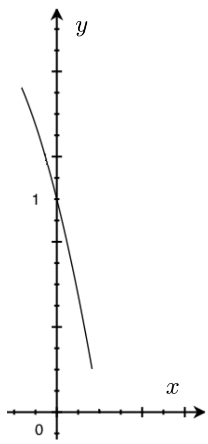
$$\begin{cases} y_1'(x) = y_1(x) - 2\,y_2(x) - x \\ y_2'(x) = 3\,y_1(x) - 4\,y_2(x) \end{cases} \quad,\ y_1(0) = 0$$

○ Una matrice fondamentale del sistema omogeneo associato è:

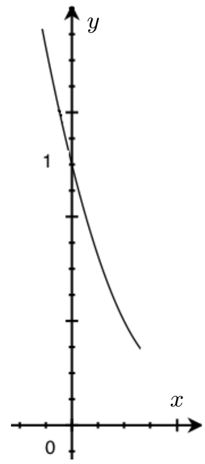
$$\mathbf{\Phi}(x) = \begin{pmatrix} e^{-(3/2)\,x} & x\,e^{-(3/2)\,x} \\ \frac{5}{4}\,e^{-(3/2)\,x} & \frac{5}{4}\,x\,e^{-(3/2)\,x} \end{pmatrix}$$

○ L'insieme delle soluzioni del sistema costituisce uno spazio vettoriale di dimensione 1.

○ Se $y_1(0) = 0$, $y_2(0) = 1$ il grafico locale della componente y_2 della soluzione è:



○ Se $y_1(0) = 0$, $y_2(0) = 1$ il grafico locale della componente y_2 della soluzione è:



==

5) È data la seguente equazione differenziale:

$$x^2\, y''(x) + x\, y'(x) + 4\, y(x) = -\log x$$

○ Due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea associata sono:
$y_1(x) = \cos(\ln x^2)$, $y_2(x) = \sin(\ln x^2) + \cos(2\,\ln x)$

○ Due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea associata sono:
$y_1(x) = \cos(2\,\ln x) - \sin(\ln x^2)$, $y_2(x) = \sin(2\,\ln x) - \cos(\ln x^2)$

○ L'insieme delle soluzioni y dell'equazione data, tali che $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = +\infty$ è formato da un solo elemento.

○ Le soluzioni y dell'equazione data, tali che $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = +\infty$ sono infinite.

Esame del 30 marzo 2017

Esercizio 1. Sia $D = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le \frac{\pi}{4},\ \sin x \le z \le \cos x\}$.
a) Determinare le coordinate del baricentro di D, supposto omogeneo.
b) Calcolare il volume del solido V, ottenuto ruotando D di 2π attorno all'asse z.
c) Determinare, se esistono, le equazioni dei piani tangenti alla superficie S, frontiera di V, nei punti $P_1\left(\frac{\pi}{8}, \frac{\sqrt{3}\,\pi}{8}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e $P_2\left(\frac{\pi}{4\sqrt{3}}, \frac{\pi}{12}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Esercizio 2. È dato il campo vettoriale piano F di componenti

$$F(x, y) = \left(\frac{1}{1+x^2} + \frac{2xy^2}{x^2+y^2},\ 2y\ln(x^2+y^2) + \frac{\beta y^3}{x^2+y^2}\right),\ \beta \in \mathbb{R}.$$

a) Determinare $\beta \in \mathbb{R}$ per cui F è conservativo nel suo dominio.
b) Per il valore di β determinato al punto precedente, calcolare, se esiste, $\int_\gamma F$, dove γ è l'arco di circonferenza di centro $C(2, 0)$ e raggio 1, percorsa in senso orario da $(1, 0)$ a $(3, 0)$.

Esercizio 3. È dato il seguente sistema differenziale: $\begin{cases} y_1'(x) = -3\,y_1(x) - 4\,y_2(x) \\ y_2'(x) = y_1(x) + y_2(x) + x \end{cases}$

a) Scrivere un'equazione differenziale lineare equivalente al sistema dato.

b) Determinare due soluzioni linearmente indipendenti del sistema omogeneo associato.

c) Determinare tutte le soluzioni del sistema dato tali che $y_1(0) = 7$.