Esercizio. Sia $I := (a, b)$ e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile in I . Dimostrare che $f'(I)$ è un intervallo, cioè che se $k_1, k_2 \in f'(I)$ e $k_1 < k < k_2$, allora anche $k \in f'(I)$.

Svolgimento. Cominciamo a dimostrare questa proposizione (dovuta a J. G. Darboux) nel caso $k = 0$. Per ipotesi dunque esistono due punti $x_1, x_2 \in I$ tali che $f'(x_1) = k_1 < 0 < f'(x_2) = k_2$; dobbiamo far vedere che esiste in I almeno un punto $\bar{x}$ tale che $f'(\bar{x}) = 0$.

Non è restrittivo supporre $x_1 < x_2$. Se $f(x_1) = f(x_2)$ la tesi è immediata per il teorema di Rolle; supponiamo ad esempio $f(x_1) < f(x_2)$ (in caso contrario possiamo scambiare f con $-f$). Per il teorema di Weierstrass, applicato all'intervallo $[x_1, x_2]$, esiste in tale intervallo almeno un punto di minimo assoluto per f (la quale è certamente continua essendo derivabile); denotiamo con $\bar{x}$ uno di tali punti di minimo. Ora non può essere $\bar{x} = x_1$, perché per ipotesi è $f'(x_1) < 0$, quindi in base alla definizione di derivata e al teorema della permanenza del segno il rapporto incrementale di f relativo al punto x_1 è negativo se x è diverso da x_1 e abbastanza vicino ad x_1 . Pertanto in un intorno destro di x_1 esistono punti x nei quali $f(x) < f(x_1)$; ciò prova che x_1 non può essere punto di minimo assoluto per f in $[x_1, x_2]$.

Discorso simile per quanto riguarda il punto x_2 . Essendo $f'(x_2) > 0$ per ipotesi, il rapporto incrementale relativo a tale punto è positivo se x è abbastanza vicino a x_2 (ma diverso da x_2), quindi in un intorno sinistro di x_2 esistono punti x nei quali $f(x) < f(x_2)$. Come nel caso precedente si ha che x_2 non può essere punto di minimo assoluto per f nell'intervallo $[x_1, x_2]$. Il punto di minimo assoluto $\bar{x}$, certamente esistente per il teorema di Weierstrass, è pertanto interno all'intervallo (x_1, x_2) e per il teorema di Fermat si ha $f'(\bar{x}) = 0$.

La tesi della proposizione è quindi dimostrata nel caso $k = 0$. Per ottenere il caso generale, supponendo $f'(x_1) < k < f'(x_2)$, consideriamo la funzione $g(x) := f(x) - kx$. Evidentemente si ha

$$g'(x_1) = f'(x_1) - k < 0 < f'(x_2) - k = g'(x_2)$$

quindi, per il caso già considerato, si ottiene l'esistenza di un punto $\bar{x} \in I$ nel quale $g'(\bar{x}) = 0$, cioè $f'(\bar{x}) = k$. $\square$