**Altro esercizio sull'estremo inferiore (estensione del risultato precedente).**

*Sia* $y \in [-1, 1]$*; dimostrare che si ha*

$$\inf\{|y - \sin n| : n \in \mathbb{N}\} = 0$$

**Svolgimento.** Occorre dimostrare che, fissato $\epsilon > 0$ arbitrario, esiste $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$(1) \qquad |y - \sin \overline{n}| < \epsilon$$

Come negli esercizi precedenti, ci procuriamo innanzi tutto due numeri naturali $p, q$ tali che

$$(2) \qquad 0 < |p - 2\pi q| < \epsilon$$

e cominciamo a considerare il caso che sia, più precisamente,

$$(2') \qquad 0 < \overline{x} := p - 2\pi q < \epsilon$$

Sia poi $t$ un numero positivo tale che

$$(3) \qquad \sin t = y$$

(si può scegliere ad esempio $t := 2\pi + \arcsin y$) e sia infine $j$ il numero naturale tale che

$$(4) \qquad j\overline{x} \le t < (j+1)\overline{x}$$

da cui

$$(4') \qquad 0 \le t - j\overline{x} < \overline{x}$$

Si conclude nel modo seguente:

$$|y - \sin(jp)| = |\sin t - \sin(jp - 2\pi jq)| = |\sin t - \sin(j\overline{x})| \le |t - j\overline{x}| < \overline{x} < \epsilon$$

La tesi è quindi provata con $\overline{n} := jp$ nel caso in cui valga la (2′).

Supponiamo ora che, in luogo della (2′), valga la

$$(2'') \qquad 0 < 2\pi q - p < \epsilon$$

Posto $\overline{x} := 2\pi q - p$ e procedendo in modo simile al caso precedente, sia ora $t$ un numero positivo tale che

$$(3') \qquad \sin t = -y$$

mentre $j$ è ancora definito dalla (4) (con la nuova scelta di $\overline{x}$). Risulta allora

$$|y - \sin(jp)| = |-y - \sin(-jp)| = |\sin t - \sin(-jp + 2\pi jq)| = |\sin t - \sin(j\overline{x})| \le |t - j\overline{x}| < \overline{x} < \epsilon$$

per cui la tesi è nuovamente provata con $\overline{n} := jp$. $\square$