

Altro esercizio sull'estremo inferiore (estensione del risultato precedente).

Sia $y \in [-1, 1]$; dimostrare che si ha

$$\inf\{|y - \sin n| : n \in \mathbb{N}\} = 0$$

Svolgimento. Occorre dimostrare che, fissato $\epsilon > 0$ arbitrario, esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$(1) \quad |y - \sin \bar{n}| < \epsilon$$

Come negli esercizi precedenti, ci procuriamo innanzi tutto due numeri naturali p, q tali che

$$(2) \quad 0 < \bar{x} := p - 2\pi q < \epsilon$$

Sia poi t un numero positivo tale che

$$(3) \quad \sin t = y$$

(si può scegliere ad esempio $t := 2\pi + \arcsin y$) e sia infine j il numero naturale tale che

$$(4) \quad j\bar{x} \leq t < (j+1)\bar{x}$$

da cui

$$(4') \quad 0 \leq t - j\bar{x} < \bar{x}$$

Si conclude nel modo seguente:

$$|y - \sin(jp)| = |\sin t - \sin(jp - 2\pi jq)| = |\sin t - \sin(j\bar{x})| \leq |t - j\bar{x}| < \bar{x} < \epsilon$$

La tesi è quindi provata con $\bar{n} := jp$ \square