Ingegneria gestionale

ANALISI MATEMATICA 1 - Prova scritta d'esame dell'11 febbraio 2019

COGNOME ________________________ NOME ______________________________

numero di matricola | | | | | | | |

N. B. Ogni affermazione va adeguatamente motivata.

Esercizio 1. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) := \arcsin\left(\frac{1}{1+x^2}\right) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

1) [p. 1] È vero che f è continua in $\mathbb{R}$? Se sì, perché?

2) [p. 1] È vero che f è di classe C^∞ in $\mathbb{R}\backslash\{0\}$? Se sì, perché?

3) [p. 6] Calcolare, se esistono, le derivate destra e sinistra di f in 0.

4) [p. 1] Stabilire se f è derivabile in 0.

5) [p. 6] Stabilire se la funzione $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da

$$g(x) := f(x) - \ln x \qquad \forall x \in (0, +\infty)$$

è iniettiva e, in caso affermativo, calcolare (se esiste) $(g^{-1})'(\pi/6)$

[Suggerimento: può essere utile ricordare che $\arcsin(1/2) = \pi/6$].

Svolgimento

1) f è continua in $\mathbb{R}$ in quanto funzione composta di una funzione razionale con la funzione arcoseno (e quindi composta di due funzioni continue).

2) L'argomento dell'arcoseno è una funzione razionale, che in $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ assume valori in $(-1, 1)$: infatti, se $x \neq 0$, si ha che $0 < \frac{1}{x^2+1} < 1$ e quindi $\frac{1}{x^2+1} \in (0, 1) \subseteq (-1, 1)$. Poiché la funzione arcoseno è di classe C^∞ in $(-1, 1)$, ne segue che f è di classe C^∞ in $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

3) Per quanto osservato al punto 2), in $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ la funzione f coincide con la composta di due funzioni di classe C^∞ (e quindi derivabili). Dal teorema di derivabilità della funzione composta segue allora che, $\forall\ x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$,

$$f'(x) = \arcsin'\left(\frac{1}{x^2+1}\right)\left(-\frac{2x}{(x^2+1)^2}\right) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{(x^2+1)^2}}} =$$

$$= -\frac{2x}{(x^2+1)^2} \cdot \sqrt{\frac{(x^2+1)^2}{(x^2+1)^2 - 1}} = -\frac{2x}{(x^2+1)^2} \cdot \frac{x^2+1}{\sqrt{x^4+2x^2+1-1}} =$$

$$= -\frac{2x}{(x^2+1)\sqrt{x^4+2x^2}} = -\frac{2x}{(x^2+1)\sqrt{x^2(x^2+2)}} =$$

$$= -\frac{2x}{|x|(x^2+1)\sqrt{x^2+2}} = \begin{cases} -\dfrac{2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}} & \text{se } x > 0 \\[2ex] \dfrac{2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}} & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

Allora

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \left[-\frac{2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}\right] = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

e

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

Poiché f è continua in 0 (per il punto 1)), da un noto corollario del Teorema di Lagrange segue che f ammette sia la derivata destra che la derivata sinistra in 0; si ha inoltre che $f'_+(0) = -\sqrt{2}$ e $f'_-(0) = \sqrt{2}$.

4) Poiché $f'_+(0) \neq f'_-(0)$ (cf. punto 3)), ne segue che f <u>non</u> è derivabile in 0.

5) Dato che sia f che il logaritmo naturale sono derivabili in $(0, +\infty)$, anche g è derivabile in $(0, +\infty)$. Dal punto 3) segue inoltre che, $\forall\, x \in (0, +\infty)$,

$$g'(x) = f'(x) - \ln'(x) = -\frac{2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}} - \frac{1}{x} = -\left(\frac{2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}} + \frac{1}{x}\right) < 0.$$

Poiché $g'(x) < 0\ \forall\, x \in (0, +\infty)$ e $(0, +\infty)$ è un <u>intervallo</u>, ne segue che g è <u>strettamente decrescente</u> in $(0, +\infty)$, e quindi è iniettiva.

Vediamo ora di stabilire se $\frac{\pi}{6}$ appartiene al dominio di g^{-1}, e cioè all'<u>immagine</u> di g. Basta osservare che

$$g(1) = f(1) + \ln 1 = f(1) = \arcsin\left(\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{\pi}{6}.$$

Pertanto $\frac{\pi}{6} \in Im(g) = Dom(g^{-1})$; inoltre, $g^{-1}\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1$.

Dato che g è derivabile in 1 e che $g'(x) < 0\ \forall\, x \in (0, +\infty)$ (e quindi, in particolare, $g'(1) \neq 0$), dal teorema di derivabilità della funzione inversa segue che g^{-1} è derivabile in $\frac{\pi}{6}$; inoltre,

$$(g^{-1})'\left(\tfrac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{g'(1)} = -\frac{1}{\left[\frac{2}{(1+1)\sqrt{1+2}} + 1\right]} = -\frac{1}{\frac{2}{2\sqrt{3}} + 1} = -\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}} + 1} = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}.$$