Analisi matematica I

Ingegneria chimica ed elettrica

Prima prova scritta intermedia – 15 gennaio 2015

Sia data la funzione $f(x) := |x|(\pi/2 - \arctan x)$.

a) Determinarne l'insieme di definizione, di continuità, di derivabilità;

b) studiarne monotonia ed eventuali punti di massimo o minimo relativo ed assoluto;

c) studiarne convessità, flessi, asintoti;

d) posto $a_n := f(n)$ $(n \in \mathbb{N})$, *alla luce delle risposte precedenti determinare (se esistono)*

$$\max_n a_n, \ \min_n a_n, \ \sup_n a_n, \ \inf_n a_n, \ \lim_n a_n$$

Svolgimento. a) La funzione $x \to |x|$ come è noto è definita in $\mathbb{R}$ e ivi continua, come pure la funzione $x \to \arctan x$. Pertanto la funzione f, prodotto di due funzioni continue in $\mathbb{R}$, è anch'essa continua in $\mathbb{R}$.

Per quanto riguarda la derivabiltà, la funzione $x \to \arctan x$ è derivabile in $\mathbb{R}$, mentre la funzione $x \to |x|$ è derivabile in $\mathbb{R}\backslash\{0\} = \{x \in \mathbb{R} : \ x \neq 0\}$. Pertanto, per noti teoremi, la funzione f è certamente derivabile in $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Per quanto riguarda la derivabilità in 0, verifichiamo: si ha

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h(\pi/2 - \arctan h)}{h} = -\pi/2,$$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h(\pi/2 - \arctan h)}{h} = \pi/2$$

pertanto non esiste, in 0, il limite del rapporto incrementale di f ed f non è derivabile in 0. (Si poteva arrivare a tale risultato anche calcolando $f'(x)$ per $x < 0$, $f'(x)$ per $x > 0$ ed osservando che $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = -\pi/2$, $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \pi/2$).

b) In base alla definizione di valore assoluto, si ha

$$f'(x) = \arctan x - \pi/2 + \frac{x}{1+x^2} \qquad \text{se } x < 0,$$

$$f'(x) = \pi/2 - \arctan x - \frac{x}{1+x^2} \qquad \text{se } x > 0$$

Si è già osservato che f non è derivabile in 0, mentre $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = -\pi/2$, $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \pi/2$. Calcoliamo anche i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to -\infty} f'(x) = -\pi, \qquad \lim_{x\to +\infty} f'(x) = 0$$

Per stabilire il segno di f' negli intervalli $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$ conviene studiare $f''(x)$; si ha

$$f''(x) = \frac{2}{(1+x^2)^2} > 0 \quad \text{se } x < 0, \qquad f''(x) = -\frac{2}{(1+x^2)^2} < 0 \quad \text{se } x > 0$$

Quindi, per noti teoremi, f' è strettamente crescente in $(-\infty, 0)$, ed essendo $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = -\pi/2 < 0$, è $f'(x) < 0$ in $(-\infty, 0)$. Si conclude così che f è strettamente decrescente in $(-\infty, 0)$.

Analogamente, f' è strettamente decrescente in $(0, +\infty)$, ed essendo $\lim_{x\to +\infty} f'(x) = 0$, è $f'(x) > 0$ in $(-\infty, 0)$. Si conclude così che f è strettamente crescente in $(0, +\infty)$.

Si ha evidentemente $f(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, $f(0) = 0$, quindi 0 è un punto di minimo assoluto per f. Essendo inoltre $f(x) > 0$ se $x \neq 0$, tale punto di minimo assoluto è unico.
Calcoliamo ora $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. Si può scrivere, per $x > 0$:

$$f(x) = x(\pi/2 - \arctan x) = \frac{\pi/2 - \arctan x}{1/x}$$

che, per $x \to +\infty$, si presenta sotto la forma indeterminata $0/0$. Sono soddisfatte le ipotesi per poter applicare il teorema di De L'Hospital (le funzioni al numeratore e denominatore sono derivabili con derivata del denominatore diversa da zero). Vediamo dunque se esiste il limite del rapporto delle derivate:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-1/(1+x^2)}{-1/x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+1/x^2} = 1$$

Ciò prova che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$. (Naturalmente si poteva calcolare il $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ anche in altri modi; ho riportato quello che mi sembrava più semplice).
Per quanto riguarda il $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, esso non è una forma indeterminata, e si vede subito che risulta $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$; ciò prova che non esistono punti di massimo assoluto. Essendo, come si è visto, f strettamente decrescente in $(-\infty, 0)$ e strettamente crescente in $(0, +\infty)$, non esistono altri punti di massimo o minimo relativo per f (oltre all'unico punto di minimo assoluto $x_0 = 0$).
c) Si è già studiato il segno della derivata seconda di f: si vede così, per noti teoremi, che f è convessa in $(-\infty, 0)$ e concava in $(0, +\infty)$. Poiché f in 0 non è derivabile, in tale punto non c'è flesso, né ci sono flessi in altri punti.
Studiamo ora gli eventuali asintoti. Si è già visto che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$, quindi la retta $y = 1$ è un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$. Si è anche visto che

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -x(\pi/2 - \arctan x) = +\infty$$

quindi potrebbe esistere un asintoto obliquo per $x \to -\infty$. Calcoliamo allora

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)/x = \lim_{x\to-\infty} -(\pi/2 - \arctan x) = -\pi$$

Poiché tale limite è reale e non nullo, sussiste ancora la possibilità che ci sia un asintoto obliquo per $x \to -\infty$. Per accertarsi di ciò, occorre calcolare un altro limite:

$$\lim_{x\to-\infty} [f(x) + \pi x] = \lim_{x\to-\infty} [-x(\pi/2 - \arctan x) + \pi x] = \lim_{x\to-\infty} x(\pi/2 + \arctan x) = -1$$

(Tale limite si calcola ad esempio usando il teorema di De L'Hospital, analogamente a quanto si è fatto per calcolare il $\lim_{x\to+\infty} f(x)$). Essendo tale limite reale, per noti teoremi si può concludere che la retta di equazione $y = -\pi x - 1$ è un asintoto obliquo per $x \to -\infty$.
4) In base a quanto si è visto sopra, si può dire che la successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è strettamente crescente (essendo tale la funzione f in $[0, +\infty)$) e quindi

$$\min_n a_n = \inf_n a_n = 0, \qquad \lim_n a_n = \sup_n a_n = 1, \qquad \nexists \ \max_n a_n$$