Analisi matematica I – Ingegneria civile-ambientale

Esame scritto – 11 gennaio 2011

Esercizio 1. Sia $f(x) = \ln |e^x - 2|$.

a) Calcolare i limiti di f agli estremi del suo insieme di definizione.

b) Calcolare $f'(x)$ (dove esiste) e studiare la monotonia di f.

c) Disegnare il grafico di f e specificare il numero degli zeri di f.

d) Determinare lo sviluppo di McLaurin di ordine 2 di f e calcolare, al variare del parametro reale α,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x^\alpha}$$

Soluzione. a) Affinchè f sia definita deve essere $e^x - 2 \neq 0$ da cui segue $x \neq \ln 2$, quindi l'insieme di definizione di f risulta $I = (-\infty, \ln 2) \cup (\ln 2, +\infty)$.

I limiti agli estremi sono

$$\lim_{x\to+\infty} \ln |e^x - 2| = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} \ln |e^x - 2| = \ln 2 \qquad \lim_{x\to\ln 2} \ln |e^x - 2| = -\infty$$

b) Se $x \neq \ln 2$ la funzione f risulta derivabile e si ha $f'(x) = \frac{e^x}{e^x-2}$ quindi $f'(x) > 0$ se $x > \ln 2$ ed $f'(x) < 0$ se $x < \ln 2$, da cui segue che la funzione f è strettamente crescente per $x > \ln 2$ e strettamente decrescente per $x < \ln 2$.

c) La funzione ha 2 zeri: $x_1 = 0$ e $x_2 = \ln 3$.

d) Cerchiamo lo sviluppo di McLaurin di f di ordine 2.

$f(0) = 0$, $f'(0) = -1$, $f''(x) = -\frac{2e^x}{(e^x-2)^2}$ da cui $f''(0) = -2$,

quindi $f(x) = -x - x^2 + o(x^2)$.

Possiamo facilmente calcolare il limite richiesto utilizzando lo sviluppo di f appena trovato

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{-x - x^2 + o(x^2)}{x^\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha < 1 \\ -1 & \text{se } \alpha = 1 \\ -\infty & \text{se } \alpha > 1. \end{cases}$$

Esercizio 2. Si consideri la funzione

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^2 \arctan y}{\sqrt{x^2+\arctan^2 y}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ \alpha & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Stabilire se f è continua dove è definita.

b) Studiare la differenziabilità di f in $(0,0)$.

c) Se esiste, calcolare $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1)$.

Soluzione. a) La funzione f è definita in $\mathbb{R}^2$ e se $(x,y) \neq (0,0)$ è continua essendo composta di funzioni continue.

Inoltre f risulta continua in (0.0) se $\lim_{(x.y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = \alpha$. Si ha che

$$\lim_{(x.y)\to(0,0)} \frac{x^2 \arctan y}{\sqrt{x^2+\arctan^2 y}} = 0$$

infatti

$$0 \leq \frac{|x \arctan y|}{\sqrt{x^2+\arctan^2 y}} \leq \frac{x^2+\arctan^2 y}{\sqrt{x^2+\arctan^2 y}} = \sqrt{x^2+\arctan^2 y}$$

quindi

$$0 \leq |f(x,y)| \leq |x|\sqrt{x^2+\arctan^2 y} \quad \text{e} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} |x|\sqrt{x^2+\arctan^2 y} = 0$$

per il terema dei carabinieri si conclude che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$, di conseguenza f risulta continua in $(0,0)$ se $\alpha = 0$.

b) Se $\alpha \neq 0$ la funzione f non è differenziabile in $(0,0)$, non essendo continua.

Sia $\alpha = 0$. Esistono $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ e valgono zero, essendo f identicamente nulla sugli assi.

Ne segue che f risulta differenziabile in $(0,0)$ se

$$\lim_{(x.y)\to(0,0)} \frac{x^2 \arctan y}{\sqrt{x^2+\arctan^2 y}\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

Sapendo che $|\arctan y| \leq |y|$, si ha

$$0 \leq \frac{|x|\ |x \arctan y|}{\sqrt{x^2+\arctan^2 y}\sqrt{x^2+y^2}} \leq |x| \frac{x^2+\arctan^2 y}{\sqrt{x^2+\arctan^2 y}\sqrt{x^2+y^2}} = |x| \frac{\sqrt{x^2+\arctan^2 y}}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq$$

$$\leq |x| \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = |x|$$

quindi, per il teorema dei carabinieri, si deduce che il limite cercato vale 0, di conseguenza f è differenziabile in (0,0).

c) Calcoliamo la derivata $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1)$ che sicuramente esiste. Ora

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\frac{x^2}{1+y^2}\sqrt{x^2+\arctan^2 y} - \frac{x^2 \arctan^2 y}{(1+y^2)\sqrt{x^2+\arctan^2 y}}}{x^2+\arctan^2 y}$$

quindi

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = \frac{1}{2(1+(\pi/4)^2)^{3/2}}.$$

Esercizio 3. Data la funzione integrale

$$f(x) := \int_0^x \frac{\arctan t - \pi/4}{\sqrt[5]{2t - \sin t - \arctan t}\ \log|t|}\, dt$$

1) tenendo presente la teoria degli integrali impropri, determinarne l'insieme di definizione;

2) determinarne l'insieme di derivabilità;

3) calcolarne i limiti agli estremi dell'insieme di definizione.

Soluzione. a) Iniziamo studiando l'insieme di definizione della funzione integranda. È noto (e si verifica facilmente) che è $t \neq \sin t\ \forall t \neq 0$, e così pure $t \neq \arctan t\ \forall t \neq 0$. Inoltre la funzione $t \to \log t$ è definita solo se $t > 0$, e si annulla per $t = 1$. Tenuto conto di tutto ciò, l'insieme di definizione della funzione integranda $g(t)$ è

$$I_g = (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (0, +\infty)$$

Per determinare il comportamento della funzione f, è ora necessario studiare la convergenza dell'integrale improprio di g in un intorno dei punti $0, -1, 1$. La funzione $t \to 2t - \sin t - \arctan t$ è infinitesima, per $t \to 0$, di ordine 3, come facilmente si verifica applicando ad esempio la formula di Mac Laurin. Tenuto conto della radice quinta, la funzione $t \to \sqrt[5]{2t - \sin t - \arctan t}$ sarà quindi infinitesima, per $t \to 0$, di ordine $3/5$ (si noti che per $t \to 0$ il numeratore di g tende ad un numero diverso da zero). Inoltre si ha, come è noto, $\lim_{t\to 0} \log t = -\infty$ di ordine inferiore a qualunque potenza di $1/|t|$. Pertanto il denominatore di g tende a 0, per $t \to 0$, di ordine poco inferiore a $3/5$, e ciò basta a concludere che l'integrale improprio converge se x sta in un opportuno intorno di 0 (più precisamente se $|x| < 1$).
Studiamo ora il comportamento dell'integranda in un intorno del punto -1. In tale punto il denominatore di g si annulla di ordine 1 (a causa del fattore $\log|t|$), mentre di nuovo il numeratore tende ad un numero diverso da zero. Allora in base alla teoria degli integrali impropri, l'integrale improprio per $x = -1$ diverge positivamnte, quindi $-1 \notin I_f$.
Studiamo infine il comportamento dell'integranda in un intorno del punto 1. Ora di nuovo il denominatore si annulla in tale punto di ordine 1, ma a differenza del caso precedente nel punto 1 si annulla pure il numeratore, sempre di ordine 1 (l'altro fattore, il radicale a denominatore, ha per limite un numero non nullo). Ciò basta a concludere che nel punto 1 l'integranda ha un limite reale (diverso da zero) ed è quindi ivi prolungabile per continuità. Si osservi infne che in tutti gli altri punti di $\mathbb{R}$ non considerati finora l'integranda è definita e continua. Per tutte queste considerazioni si può dire che la funzione f è definita in $(-1, +\infty)$.
b) Per noti teoremi, la funzione integrale è derivabile in tutti i punti nei quali l'integranda è continua o prolungabile per continuità, mentre non è derivabile nei punti in cui l'integranda tende a $+\infty$ o a $-\infty$ (da destra o da sinistra), né dove l'integranda ha delle discontinuità di prima specie. Per questo motivi dobbiamo togliere dall'insieme di definizione di f il punto 0 perché si ha, come si è visto, $\lim_{t\to 0^+} g(t) = +\infty$, $\lim_{t\to 0^-} g(t) = -\infty$. L'insieme di derivabilità di f è pertanto $I_{f'} := (-1, 0) \cup (0, +\infty)$.
c) Si è visto che in -1 l'integrale improprio diverge, quindi il limite della funzione integrale in tale punto è infinito; più precisamente, tenendo conto dei segni, si ha

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$$

Per quanto riguarda il comportamento di f a $+\infty$, si può osservare che l'integranda è infinitesima, per $t \to +\infty$, di ordine basso (poco superiore ad $1/5$, a causa del fattore $\log|t|$ che diverge positivamente ma di ordine inferiore a qualunque potenza di t). Si può anche osservare che per t abbastanza grande l'integranda è positiva, e siccome essa è infinitesima di ordine troppo basso affinché converga l'integrale improprio $\int_0^{+\infty} g(t)\,dt$, si conclude che tale integrale improprio diverge positivamente e quindi

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$