Data la funzione

$$f(x) := (\log_2 x)^2 - 2\log_2 x$$

a) calcolarne i limiti agli estremi del suo insieme di definizione I;

b) studiarne gli insiemi di crescenza e decrescenza;

c) posto $a_n := f(n+1) \quad (n \in \mathbb{N})$, calcolare, se esistono,

$$\max_n a_n, \quad \min_n a_n, \quad \sup_n a_n, \quad \inf_n a_n, \quad \lim_n a_n$$

d) detta g la restrizione di f all'intervallo $[2, +\infty)$, stabilire se la funzione g è invertibile, ed in caso affermativo determinarne esplicitamente l'inversa, precisandone dominio ed immagine;

e) posto $\phi(x) := f(x)\sin(x^2-1)$, calcolare l'ordine di infinitesimo di ϕ per $x \to 1$.

Svolgimento. a) Come è noto, la funzione $x \to \log_2 x$ è definita solo se $x > 0$; pertanto si ha $I = (0, +\infty)$. È pure noto che risulta $\lim_{x\to 0+} \log_2 x = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} \log_2 x = +\infty$, da cui, con facili calcoli,

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

b) La funzione f è evidentemente derivabile nel suo insieme di definizione, e risulta, per ogni $x \in I$:

$$f'(x) = \frac{2(\log_2 x - 1)}{x \log 2}$$

Dall'espressione della derivata f' e da noti teoremi, segue che f è strettamente decrescente in $(0, 2]$ e strettamente crescente in $[2, +\infty)$; il punto 2 è quindi per f un punto di minimo assoluto.

c) Si ha $a_o = 0, \ a_1 = -1$. Essendo la funzione f strettamente crescente in $[2, +\infty)$, si ha $f(m) < f(n) \ \forall n, m \in [2, +\infty) \cap \mathbb{N}$ con $m < n$. In particolare si ha $f(2) < f(n) \ \forall n \in \mathbb{N}, n > 2$, cioè $a_1 < a_{n-1} \ \forall n > 2$ e infine $a_1 < a_n \ \forall n > 1$. Ne segue facilmente

$$\inf_n a_n = \min_n a_n = -1, \quad \sup_n a_n = \lim_n a_n = +\infty, \quad \nexists \ \max_n a_n$$

d) Si è già osservato (punto b)) che la funzione f è strettamente crescente in $[2, +\infty)$, quindi anche la funzione g (che coincide con f in $[2, +\infty)$) ha la stessa proprietà. Per noti teoremi l'immagine di g sarà l'intervallo $[-1, +\infty)$ (visto che $g(2) = f(2) = -1$ e $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$). Come è noto una funzione strettamente crescente come g è iniettiva e quindi invertibile; la funzione inversa g^{-1} è definita in $[-1, +\infty)$ (che era l'immagine di g) ed ha come immagine $[2, +\infty)$ (che era l'insieme di definizione di g). Per trovare un'espressione esplicita di g^{-1}, basta porre ad esempio $y = g(x)$ (per $x \in [2, +\infty)$) e ricavare la variabile x in funzione di y. Con facili calcoli si trova:

$$y = (\log_2 x)^2 - 2\log_2 x$$

Si può considerare tale uguaglianza come un'equazione algebrica di secondo grado nell'incognita $\log_2 x$, ottenendo così

$$\log_2 x = 1 \pm \sqrt{1+y}$$

Delle due radici trovate, si considera solo quella col segno $+$, essendo come si è detto $x \geq 2$ e quindi $\log_2 x \geq 1$. Ne segue pertanto

$$\log_2 x = 1 + \sqrt{1+y}, \quad x = 2^{1+\sqrt{1+y}}, \quad \forall \ y \in [-1, +\infty)$$

Tornando alla variabile x, si può concludere che la funzione inversa di g è data da

$$g^{-1}(x) = 2^{1+\sqrt{1+x}}, \qquad \forall x \ \in [-1, +\infty)$$

e) Per semplificare i calcoli è opportuno operare il cambiamento di variabile $t := x - 1$, o, se si vuole, $x := t + 1$, e considerare, in luogo della funzione ϕ, la funzione

$$h(t) := \phi(t+1) = f(t+1)\sin[(t+1)^2 - 1] = \{[\log_2(t+1)]^2 - 2\log_2(t+1)\}\sin(2t + t^2)$$

Evidentemente la funzione h è infinitesima per $t \to 0$, ed è infinitesima dello stesso ordine con cui è infinitesima la funzione ϕ per $x \to 1$. Osserviamo intanto che

$$[\log_2(t+1)]^2 - 2\log_2(t+1) = \log_2(t+1)[\log_2(t+1) - 2]$$

e dei due fattori al secondo membro, solo il primo è infinitesimo per $t \to 0$. A questo punto possiamo considerare solo i due fattori infinitesimi (per $t \to 0$) di h, che sono $\log_2(t+1)$ e $\sin(2t + t^2)$. Se riusciamo a calcolare l'ordine di infinitesimo di ciascuno di questi due fattori, avremo concluso, perché è noto che l'ordine di infinitesimo di un prodotto è dato dalla somma degli ordini di infinitesimo dei singoli fattori.

Come è noto o si verifica facilmente, si ha

$$\lim_{t\to 0} \frac{\log_2(t+1)}{t} = \log_2 e, \qquad \lim_{t\to 0} \frac{\sin(2t + t^2)}{t} = 2$$

cioè i due fattori infinitesimi della funzione h sono entrambi infinitesimi di ordine 1. Si conclude pertanto che la funzione h è infinitesima (per $t \to 0$) di ordine $1 + 1 = 2$, e questo è pure l'ordine di infinitesimo, per $x \to 1$, della funzione ϕ. $\square$