Esercizio. *Dimostrare che risulta*

$$\arcsin x + \arccos x = \pi/2 \qquad \forall x \in [-1,1] \tag{1}$$

Svolgimento. Come è noto, la funzione $x \to \arcsin x$ è la funzione inversa della restrizione della funzione $x \to \sin x$ all'intervallo $[\pi/2, \pi/2]$ (nel quale essa è strettamante crescente), in modo che risulta

$$\arcsin(\sin x) = x \qquad \forall x \in [-\pi/2, \pi/2] \tag{2}$$

$$\sin(\arcsin x) = x \qquad \forall x \in [-1,1] \tag{3}$$

Analogamente la funzione $x \to \arccos x$ è la funzione inversa della restrizione della funzione $x \to \cos x$ all'intervallo $[0, \pi]$ (nel quale essa è strettamante decrescente), in modo che risulta

$$\arccos(\cos x) = x \qquad \forall x \in [0, \pi] \tag{4}$$

$$\cos(\arccos x) = x \qquad \forall x \in [-1,1] \tag{5}$$

La tesi (1) può essere equivalentemente scritta

$$\arccos x = \pi/2 - \arcsin x \qquad \forall x \in [-1,1] \tag{$1'$}$$

Si osservi che, per ogni $x \in [-1,1]$, i due membri della $(1')$ appartengono entrambi all'intervallo $[0, \pi]$, nel quale la funzione $x \to \cos x$ è strettamente decrescente, quindi iniettiva. La $(1')$ sarà pertanto provata non appena si dimostri che la funzione $x \to \cos x$, applicata a ciascun membro della $(1')$, fornisce lo stesso risultato.

È ben noto dalla trigonometria che

$$\cos(\pi/2 - \alpha) = \sin \alpha \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

per cui, calcolando il coseno dei due membri della $(1')$, si trova:

$$\cos(\arccos x) = x \qquad \forall x \in [-1,1] \tag{6}$$

$$\cos(\pi/2 - \arcsin x) = \sin(\arcsin x) = x \qquad \forall x \in [-1,1] \tag{7}$$

Dalle (6), (7) segue la $(1')$ e la tesi è dimostrata. $\square$