

Una proprietà della funzione arcotangente.

Sia $x > 0$; risulta allora $\arctan x + \arctan(1/x) = \pi/2$

Dimostrazione. Osserviamo preliminarmente che, come risulta dalla definizione della funzione arcotangente, si ha

$$(1) \quad \tan(\arctan x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$(2) \quad \arctan(\tan y) = y \quad \forall y \in (-\pi/2, \pi/2)$$

Sia ora $x > 0$; poniamo $y = \arctan x$, allora è $y \in (0, \pi/2)$ e quindi anche $\pi/2 - y \in (0, \pi/2)$; dalla (1) si ha intanto

$$(3) \quad x = \tan y$$

Per note formule di trigonometria:

$$(4) \quad \tan(\pi/2 - y) = \frac{\sin(\pi/2 - y)}{\cos(\pi/2 - y)} = \frac{\cos y}{\sin y} = \frac{1}{\tan y}$$

Poiché $\pi/2 - y \in (0, \pi/2)$, dalle (2), (3), (4) ricaviamo

$$\arctan[\tan(\pi/2 - y)] = \pi/2 - y = \arctan(1/\tan y)$$

cioè

$$\pi/2 - \arctan x = \arctan(1/x) \quad \square$$