Altra proprietà della funzione arcotangente

Esercizio. *Dimostrare che risulta*

$$\arctan 1 + \arctan 2 + \arctan 3 = \pi$$

Dimostrazione. Poiché $\arctan 1 = \pi/4$, la tesi è equivalente a scrivere

$$\arctan 2 + \arctan 3 = (3/4)\pi \tag{1}$$

Poiché l'arcotangente è una funzione strettamente crescente in $\mathbb{R}$, a valori in $(-\pi/2, \pi/2)$, si ha

$$\arctan 2 \in (\pi/4, \pi/2), \qquad \arctan 3 \in (\pi/4, \pi/2) \tag{2}$$

e anche, ovviamente,

$$(3/4)\pi \in (\pi/2, \pi) \tag{3}$$

Dalla (2) segue

$$\arctan 2 + \arctan 3 \in (\pi/2, \pi) \tag{4}$$

Poiché nell'intervallo $(\pi/2, \pi)$ la tangente è una funzione strettamente crescente (quindi iniettiva), la (1) sarà provata non appena si dimostri che i due membri della (1) hanno la tessa tangente. Per note formule di trigonometria si ha

$$\tan(\arctan 2 + \arctan 3) = \frac{\tan(\arctan 2) + \tan(\arctan 3)}{1 - \tan(\arctan 2)\tan(\arctan 3)} = \frac{2+3}{1 - 2 \times 3} = -1$$

e inoltre

$$\tan(3/4)\pi = -1$$

La (1) è così provata. $\square$