Uso del principio di induzione per risolvere un indovinello.

Supponiamo di avere a disposizione una bilancia a due piatti uguali come questa:

Con tale bilancia è possibile stabilire se gli oggetti posti nei due piatti hanno lo stesso peso, o se pesa di più quanto nel piatto A, o se pesa di più quanto nel piatto B. Ci sono dunque tre possibilità; non c'è quindi da stupirsi che il numero 3 avrà importanza nel seguito.
Intendiamo con *pesata* l'atto di mettere qualche cosa nei due piatti della bilancia, ottenendo uno dei tre risultati di cui si è detto.
Supponiamo ora di aver un certo numero n (con $n \geq 2$) di monete, delle quali si sappia che sono tutte uguali, tranne una che ha un peso inferiore alle altre. Cioè di queste n monete ce ne sono $n-1$ aventi lo stesso peso, e una avente peso inferiore. Si può allora formulare il

Problema. *Determinare il minimo numero di pesate m sufficiente per individuare la moneta meno pesante.*

Converrà, per fissare le idee, cominciare a vedere che cosa succede prendendo per n un numero basso. Si è detto che si suppone $n \geq 2$ (se $n = 1$ non si può porre il problema); allora se $n = 2$ basta evidentemente una pesata per capire quale delle due monete pesa meno. Lo stesso se $n = 3$: basta mettere una moneta in un piatto, un'altra nell'altro piatto, lasciando fuori la terza. Se la bilancia rimane in equilibrio, la moneta che pesa meno è quella lasciata fuori, altrimenti la pesata ci dice qual è la moneta cercata.
Quindi finora abbiamo risolto il problema nei casi $n = 2$ e $n = 3$. Si vede subito che se $n \geq 4$ non basta più una sola pesata, comunque si dispongano le monete (tutte assieme o due alla volta). Facendo ancora un po' di prove dirette, e mettendo nei piatti della bilancia gruppi di due o più monete, si può vedere che con due pesate è possibile arrivare a trovare la moneta più leggera se $n \leq 9$. A questo punto possiamo formulare la seguente proposizione (che per ora è una congettura, ma che poi tenteremo di dimostrare):

($\mathbb{P}_m$): **Sia m tale che $2 \leq n \leq 3^m$. Allora per trovare la moneta più leggera sono sufficienti m pesate**.

Per dimostrare la proprietà ($\mathbb{P}_m$) possiamo usare il classico principio di induzione. Come è noto, occorre spezzare la dimostrazione in due parti: prima far vedere che la proposizione è vera per il minimo valore possibile di m (nel nostro caso se $m = 1$), e poi dimostrare che se la ($\mathbb{P}_m$) vale per un certo valore di m, allora vale anche per $m+1$.

Che la proposizione $(\mathbb{P}_m)$ valga per $m=1$ l'abbiamo già verificato: infatti se $2 \leq n \leq 3$ abbiamo visto che è sufficiente una sola pesata. In base al procedimento per induzione, dobbiamo ora dimostrare che vale la proprietà $(\mathbb{P}_{m+1})$ se ammettiamo che valga $(\mathbb{P}_m)$.
Supponiamo dunque $3^m < n \leq 3^{m+1}$ (infatti se $n \leq 3^m$ non c'è nulla da dimostrare); conviene però distinguere vari casi.
Cominciamo dal caso $n = 3^{m+1} = 3 \times 3^m$. In questo caso possiamo formare 3 gruppi di 3^m monete; con una sola pesata possiamo individuare quale di questi tre gruppi contiene la moneta più leggera. A questo punto abbiamo ancora a disposizione m pesate, e per l'ipotesi induttiva il problema è risolto.

Consideriamo ora il caso $2 \times 3^m \leq n < 3^{m+1}$. In questo caso possiamo formare due gruppi di 3^m monete e un gruppo meno numeroso (eventualmente vuoto). Mettiamo nei due piatti della bilancia i gruppi di 3^m monete lasciando da parte il gruppo più piccolo (eventualmente vuoto). Con una pesata ancora una volta riusciamo ad individuare il gruppo che contiene la moneta più leggera, e siccome ogni gruppo contiene al più 3^m monete, il problema è risolto per l'ipotesi induttiva.

Vediamo infine il caso in cui $3^m < n < 2 \times 3^m$. Possiamo formare due gruppi di $n/2$ monete se n è pari, oppure, se n è dispari, formiamo due gruppi di $(n-1)/2$ monete lasciando fuori una moneta. (Osserviamo che in ogni caso è $n/2 < 3^m$ per l'ipotesi fatta su n). Mettiamo sui due piatti della bilancia i gruppi di $n/2$ monete o $(n-1)/2$ monete (a seconda che n sia pari o dispari); resta fuori al massimo una moneta. Ci siamo ormai ricondotti a un caso simile al precedente (ogni gruppo di monete ne contiene al massimo 3^m) quindi il problema è nuovamente risolto in base all'ipotesi induttiva.

Resta solo da osservare che, in casi particolari, è evidentemente possibile rispondere alla domanda con un numero di pesate inferiore a quello calcolato: infatti si è affermato che sono *sufficienti* m pesate (con m come sopra indicato), non *necessarie*. $\square$