Quali anni sono bisestili?

Per varie considerazioni astronomiche che non è il caso di riportare qui, si è deciso quanto segue.

Dopo il 1582 (anno della riforma del calendario, che è passato da "giuliano" a "gregoriano"), un anno n è bisestile se n è divisibile per 400 oppure se n è divisibile per 4 ma non è divisibile per 100. (Quindi per esempio 2000 è bisestile come 2004, mentre non sono bisestili 1900 o 2003).

Problema. *Scrivere una funzione che, dato l'anno n, stabilisca se tale anno è bisestile o no.*

Per risolvere questo problema ci serviremo di alcune semplici funzioni definite in $\mathbb{R}$.

La prima è $x \mapsto \operatorname{sign}(x)$, detta *segno di x*, definita da

$$\operatorname{sign}(x) := \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

L'altra è $x \mapsto [x]$, detta *parte intera di x*, definita da

$$[x] := \max\{n \in \mathbb{Z} : \ n \leq x\}$$

(In altre parole $[x]$ è il massimo intero relativo non superiore a x).

Possiamo osservare che se consideriamo la funzione composta

$$g(x) := \operatorname{sign}(x - [x])$$

si ha che

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}, \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

(Infatti ovviamente è $x - [x] = 0$ se e solo se $x \in \mathbb{Z}$, mentre è $x - [x] > 0$ se e solo se $x \notin \mathbb{Z}$, quindi in questo caso $\operatorname{sign}(x - [x]) = 1$).

Premesso tutto questo, possiamo considerare la funzione

$$f(n) := 1 - \operatorname{sign}\left(\frac{n}{400} - \left[\frac{n}{400}\right]\right) + \operatorname{sign}\left(\frac{n}{100} - \left[\frac{n}{100}\right]\right)\left\{1 - \operatorname{sign}\left(\frac{n}{4} - \left[\frac{n}{4}\right]\right)\right\}$$

È facile verificare che la funzione f risolve il nostro problema, in quanto $f(n) = 1$ se e solo se n è bisestile, mentre $f(n) = 0$ se e solo se n non è bisestile. (Si osservi che se n è divisibile per 400 allora è divisibile anche per 100 e per 4; se è divisibile per 100, allora è divisibile anche per 4. Queste semplici osservazioni possono essere utili per la verifica di cui sopra). $\square$