Esercizio sulla densità.

Sia α un numero reale positivo; definiamo

$$A(\alpha) := \{m\alpha + n : m, n \in \mathbb{Z}\}$$

Dimostrare che l'insieme $A(\alpha)$ è denso in $\mathbb{R}$ se e solo se α è irrazionale.

Svolgimento. Come è noto, la tesi significa che (nel caso α irrazionale) ogni intervallo di lunghezza positiva in $\mathbb{R}$ contiene almeno un elemento di $A(\alpha)$; equivalentemente, si può dire che per ogni $t \in \mathbb{R}$ e ogni $\epsilon > 0$, esiste almeno un elemento $x \in A(\alpha)$ tale che

$$(1) \qquad |x - t| < \epsilon$$

Useremo nel seguito questa formulazione della tesi.
Cominciamo a supporre α irrazionale e $t \in \mathbb{Z}$: in questo caso non c'è nulla da dimostrare perché $t \in A(\alpha)$ (basta prendere $m = 0, n = t$).
Supponiamo ora $t \in (0, 1)$, e anche $\alpha > 0$. In questo caso ricordiamo da un esercizio precedente che, fissato comunque $\epsilon > 0$, si possono trovare due numeri naturali $p.q$ tali che

$$(2) \qquad |q\alpha - p| < \epsilon$$

Se invece è $\alpha < 0$ possiamo ragionare sul numero $-\alpha$ che è positivo, e troviamo così due numeri naturali p', q' tali che

$$(2') \qquad |-q'\alpha - p'| < \epsilon$$

Pertanto si può dire che in ogni caso si possono trovare due numeri interi relativi $m, n \in \mathbb{Z}$ tali che

$$(3) \qquad |m\alpha + n| < \epsilon$$

infatti dalle (2), (2') possiamo prendere: $m = q, n = -p$ se $\alpha > 0$, e $m = -q', n = -p'$ se $\alpha < 0$.
Posto ora

$$(4) \qquad x := |m\alpha + n|$$

sia j il numero naturale tale che

$$(5) \qquad jx \leq t < (j + 1)x$$

o equivalentemente

$$(5') \qquad 0 \leq t - jx < x$$

Allora, se $m\alpha + n > 0$, dalle $(3), (4), (5')$ abbiamo

$$(6) \qquad 0 \leq t - (jm\alpha + jn) < \epsilon$$

mentre se $m\alpha + n < 0$ abbiamo

$$(6') \qquad 0 \leq t - (-jm\alpha - jn) < \epsilon$$

quindi in ogni caso la tesi è provata, essendo $\pm jm, \pm jn \in \mathbb{Z}$.

Resta da considerare il caso in cui $t \notin \mathbb{Z} \cup (0,1)$. In questo caso possiamo considerare la parte intera di t:

$$[t] := \text{massimo intero non superiore a } t$$

e osserviamo che si ha

$$t - [t] \in (0,1) \tag{7}$$

Allora per quanto già provato esistono due numeri $m, n \in \mathbb{Z}$ tali che

$$|t - [t] - (m\alpha + n)| < \epsilon \tag{8}$$

o equivalentemente

$$|t - (m\alpha + n + [t])| < \epsilon \tag{8'}$$

per cui la tesi è ancora una volta provata, essendo $m, n + [t] \in \mathbb{Z}$.

Resta da provare l'altra parte dell'enunciato, cioè che l'insieme $A(\alpha)$ non è denso in $\mathbb{R}$ se α è razionale. Si può ragionare facilmente per assurdo. Supponiamo che sia $\alpha = p/q$, con $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}, q \geq 1$; non è restrittivo supporre anche (se si vuole) p, q primi tra loro.
Sia ora $t \in (0, 1/q)$; dico che $t \notin A(p/q)$. Infatti se fosse $t \in A(p/q)$ si avrebbe

$$t = mp/q + n \qquad (m, n \in \mathbb{Z}) \tag{9}$$

da cui, moltiplicando per q:

$$tq = mp + nq \tag{9'}$$

assurdo in quanto $0 < tq < 1$ per la scelta di t, mentre il secondo membro della (9′) è un numero intero.
Ciò prova che l'intervallo $(0, 1/q)$ non contiene alcun punto di $A(p/q)$; la tesi è quindi completamente dimostrata. $\square$