Sulla derivabilità delle funzioni integrali.

Supponiamo che sia data una funzione $g : I \to \mathbb{R}$, con $I \subset \mathbb{R}$ intervallo, g limitata ed integrabile in I, e x_o un punto fissato di I. Risulta quindi ben definita, per ogni $x \in I$, la funzione integrale

$$f(x) := \int_{x_o}^{x} g(t)\, dt$$

Ci proponiamo di studiare il problema della derivabilità della funzione f.

Intanto per incominciare, è ben noto il seguente risultato (detto talvolta *teorema fondamentale del calcolo integrale)*:

Teorema. f è derivabile in tutti i punti di I nei quali g è continua.

Ci chiediamo ora se tale proposizione si può invertire, cioè: f è derivabile **solo** nei punti dove g è continua?

È facile convincersi che la risposta a questa domanda è negativa. Basta infatti osservare che **esistono funzioni derivabili (in un intervallo) con derivata non continua in qualche punto** (un esempio di tali funzioni viene riportato in seguito). Sia dunque f una funzione derivabile in I con derivata non continua in I; per definizione, la sua derivata $g(x) := f'(x)$ è una funzione, non continua, dotata di primitive in I (un sua primitiva è evidentemente f).

Continuando lo studio della derivabilità della funzione integrale, si può ancora affermare quanto segue: **se in un punto $\overline{x}$ la funzione integranda g è tale che vale almeno una delle seguenti condizioni:**

$$\lim_{x\to\overline{x}+} g(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to\overline{x}-} g(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to\overline{x}+} g(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to\overline{x}-} g(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to\overline{x}-} g(x) \neq \lim_{x\to\overline{x}+} g(x)$$

allora f non è derivabile in $\overline{x}$.

Per dimostrare questa proposizione, basta osservare che, se ad esempio vale la prima condizione $\lim_{x\to\overline{x}+} g(x) = +\infty$, allora, come conseguenza del teorema di De L'Hospital, risulta pure

$$\lim_{x\to\overline{x}+} [f(x) - f(\overline{x})]/(x - \overline{x}) = +\infty$$

quindi evidentemente in questo caso f non può essere derivabile nel punto $\overline{x}$. Ragionamento analogo si può fare in tutti gli altri casi.

Resta solo da trovare una funzione derivabile in un intervallo, la cui derivata non sia continua in almeno un punto dell'intervallo. Basta considerare ad esempio la funzione

$$f(x) := \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Tale funzione, come subito si verifica, è continua in tutto $\mathbb{R}$, è derivabile in tutto $\mathbb{R}$, mentre la sua derivata non è continua in 0.