Una proprietà delle funzioni derivabili e sue conseguenze.

Supponiamo che sia data una funzione $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, derivabile in tutti i punti di (a, b). Vale allora la seguente

Proposizione. Sia $x_o \in (a, b)$. Se esiste il $\lim_{x \to x_o+} f'(x) = \ell$, allora risulta pure

$$\lim_{x \to x_o+} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = \ell$$

(discorso analogo per il limite sinistro). La proprietà si dimostra facilmente applicando il teorema di de l'Hôspital al rapporto $[f(x) - f(x_o)]/(x - x_o)$; non è difficile verificare che le ipotesi del teorema sono tutte soddisfatte.

La proposizione suddetta ha varie consegeunze:

1) Per ogni $x_o \in (a, b)$, il $\lim_{x \to x_o+} f'(x)$ non può valere né $+\infty$ né $-\infty$ (stesso enunciato per il limite sinistro). Infatti per la proposizione precedente tale limite coincide con il limite (destro o sinistro) del rapporto incrementale della funzione f; tale limite è reale essendo f derivabile in x_o.

2) La funzione f' non può avere, in nessun punto di (a, b), una discontinuità di prima specie. Se in un punto $x_o \in (a, b)$ si avesse

$$\lim_{x \to x_o+} f'(x) = \ell_1, \quad \lim_{x \to x_o-} f'(x) = \ell_2$$

con $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$, $\ell_1 \neq \ell_2$, per la proposizione precedente la funzione non sarebbe derivabile in x_o avendo il rapporto incrementale limite destro e limite sinistro diversi.

3) Se in un punto $x_o \in (a, b)$ la funzione f' non è continua, necessariamente non esiste o $\lim_{x \to x_o+} f'(x)$ o $\lim_{x \to x_o-} f'(x)$ (o nessuno dei due). Ciò è una semplice conseguenza delle osservazioni precedenti.