Esercizio. *Il numero* e *è irrazionale: dimostrarlo usando la formula di Mac Laurin col resto di Lagrange.*

Svolgimento (Jean Baptiste Fourier, 1768 - 1830). Come è noto, si può scrivere

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!}$$

essendo c un punto opportuno dell'intervallo $(0, x)$ (si tratta della formula di Mac Laurin dell'esponenziale, col resto di Lagrange, tenendo conto del fatto che le derivate successive dell'esponenziale calcolate nell'origine valgono tutte 1). Ponendo $x = 1$ otteniamo

$$0 < e - \left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) = \frac{e^c}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}$$

nella quale si è anche usato il fatto che (come è noto) $e < 3$, mentre $0 < c < 1$.
Ragioniamo ora per assurdo, e supponiamo che il numero e sia razionale, uguale ad una frazione p/q (con p, q naturali positivi). Scegliamo $n \geq \max\{3, q\}$ e riscriviamo l'ultima disuguaglianza moltiplicandola per $n!$ ottenendo così

$$0 < \frac{pn!}{q} - \left(n! + n! + \frac{n!}{2} + \cdots + 1\right) < \frac{3}{n+1}$$

Il membro intermedio di tale disuguaglianza è evidentemente un numero naturale positivo, quindi maggiore o uguale ad 1, assurdo in quanto $3/(n+1) < 1$. $\square$