ANALISI MATEMATICA 1 - Prova scritta dell'11-9-2015 - Traccia di soluzione

Esercizio 2. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = (\sin x)y(x) + \sin|2x| \\ y(\alpha) = -1. \end{cases}$$

(a) [p.ti 2]. Dire di che tipo è l'equazione e stabilire per quali valori del parametro reale α (se ce ne sono) il problema ha una ed una sola soluzione in un intorno del punto iniziale.
(b) [p.ti 2]. Determinare l'insieme di definizione delle soluzioni al variare del parametro reale α.
(c) [p.ti 3]. Determinare, se esiste, la soluzione (o le soluzioni) nel caso $\alpha = 0$. (N.B. La soluzione va espressa nel modo più conciso possibile).
(d) [p.ti 3]. Stabilire se la soluzione di cui al punto precedente ammette derivata seconda nell'origine.

(a) e (b) *L'equazione, essendo della forma*

$$y'(x) = a(x)y(x) + f(x) \qquad \text{dove } a(x) := \sin x,\ f(x) := \sin|2x|,$$

è una EDO del primo ordine in forma normale, lineare, non omogenea, con coefficienti (le funzioni a e f) continui non costanti.

La teoria generale delle EDO lineari a coefficienti continui assicura che per una tale equazione esiste un'unica soluzione y tale che $y(x_0) = y_0$ per ogni $y_0 \in \mathbb{R}$ e per ogni x_0 nel più grande intervallo I su cui sono (definiti e) continui (simultaneamente tutti) i coefficienti dell'equazione, inoltre tale soluzione è definita in tutto l'intervallo I. Essendo, nel caso in esame, le funzioni a ed f (definite e) continue su $I = \mathbb{R}$, il problema di Cauchy proposto ammette soluzione unica, definita su tutto $\mathbb{R}$, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

Osservazione. *Alla stessa conclusione si giunge ricordando che, dalla teoria delle equazioni differenziali lineari del primo ordine in forma normale, l'equazione ha soluzione unica data dalla formula risolutiva "esplicita" (assumendo di volere $y(x_0) = y_0$):*

$$y(x) = e^{A(x)}\left(y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{-A(u)} f(u)\,du\right)$$

dove A è la primitiva nulla in x_0 della funzione a (cioè $A(x) = \int_{x_0}^{x} a(t)\,dt$). La formula scritta ha senso per gli x nel più grande intervallo I su cui sia a che f sono (definite e) continue e $x_0 \in I$ (cosicché esista l'integrale scritto e si possa usare il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale).

(c) *Come già detto, l'equazione ha un'unica soluzione y tale che $y(0) = -1$ e tale soluzione si può ricavare esplicitamente per mezzo della formula sopra ricordata. A tal fine dobbiamo esplicitare le due funzioni integrali (la seconda dipendente dalla prima):*

$$A(x) = \int_0^x \sin t\,dt = [-\cos t]_0^x = -\cos x + 1, \quad \int_0^x e^{-A(u)} f(u)\,du = \int_0^x e^{\cos u - 1}\sin|2u|\,du.$$

Per il calcolo del secondo integrale, data la presenza del modulo, può essere utile considerare due casi: $x \geq 0$ e $x < 0$.
Se $x \geq 0$ allora $2u \in [0, x]$ è non negativo e quindi $|2u| = 2u$, in tal caso

$$\int_0^x e^{\cos u - 1}\sin|2u|\,du = \int_0^x e^{\cos u - 1}\sin(2u)\,du = 2\int_0^x \cos u\, e^{\cos u - 1}\sin u\,du,$$

che, posto $v = \cos u - 1$ *(da cui* $dv = -\sin u\, du$*) e integrando per sostituzione e poi per parti, dà*

$$2\int_0^x \cos u\, e^{\cos u - 1} \sin u\, du = -2\int_0^{\cos x - 1} (v+1)e^v\, dv = -2\left[(v+1)e^v - \int e^v\, dv\right]_0^{\cos x - 1}$$
$$= -2\left[ve^v\right]_0^{\cos x - 1} = -2(\cos x - 1)e^{\cos x - 1}.$$

Se invece $x < 0$ *allora* $2u \in [x, 0]$ *è non positivo e quindi* $|2u| = -2u$*, in tal caso (come sopra)*

$$\int_0^x e^{\cos u - 1} \sin|2u| du = -\int_0^x e^{\cos u - 1} \sin(2u) du = 2\int_x^0 \cos u\, e^{\cos u - 1} \sin u\, du = -2\left[ve^v\right]_{\cos x - 1}^0$$
$$= 2(\cos x - 1)e^{\cos x - 1}$$

La soluzione cercata è quindi la funzione (ovviamente derivabile in quanto soluzione dell'equazione differenziale)

$$y(x) := \begin{cases} -e^{1-\cos x} + 2(\cos x - 1) & \textit{se } x < 0 \\ \\ -1 & \textit{se } x = 0 \\ \\ -e^{1-\cos x} - 2(\cos x - 1) & \textit{se } x > 0 \end{cases}$$

(d) *Detta* y *la soluzione del problema di Cauchy con* $y(0) = -1$ *(la cui espressione esplicita è stata, peraltro, ricavata nel punto precedente), si ha che* y *è certamente derivabile in* $\mathbb{R}$*, e quindi a fortiori ivi continua, ed essendo*

$$y'(x) = (\sin x)y(x) + \sin|2x| \quad \textit{per ogni } x \in \mathbb{R}$$

anche la sua derivata y' *è almeno continua su tutto* $\mathbb{R}$ *perché a secondo membro c'è una somma di funzioni continue. Se però* y *fosse due volte derivabile in* 0 *(cioè se* y' *fosse derivabile in* 0*) allora, essendo*

$$\sin|2x| = y'(x) - (\sin x)y(x) \quad \textit{per ogni } x \in \mathbb{R},$$

la funzione $x \mapsto \sin|2x|$ *sarebbe anch'essa derivabile in* 0*, il che è palesemente falso, come si vede subito considerando il rapporto incrementale*

$$\frac{\sin|2x| - 0}{x - 0} = \frac{\sin|2x|}{x} = 2\frac{\sin|2x|}{|2x|}\frac{|x|}{x}$$

che, tenuto conto del limite notevole $\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ *e della definizione di modulo, ha limite* 2 *per* $x \to 0^+$ *e* -2 *per* $x \to 0^-$*. Pertanto* y *non ammette derivata seconda in* 0*.*

(Svolgimento a cura del dott. Alessio Del Padrone)