Sia dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) + 2y'(x) + ky(x) = |x| \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

a) Supponendo $k > 0$, studiare la natura del punto critico $x_o = 0$ per la soluzione del problema.

b) Sia ora $k = -3$; quante volte la soluzione del problema è derivabile in tutto $\mathbb{R}$?

c) Sia $k = -3$; determinare la soluzione del problema.

Svolgimento. a) Sia $y(x)$ la soluzione del problema, che esiste ed è unica in tutto $\mathbb{R}$ per noti teoremi. (Si tratta infatti di un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti, con termine noto continuo in $\mathbb{R}$). Dall'equazione e dalle condizioni iniziali segue immediatamente che

$$y''(0) + 2y'(0) + ky(0) = y''(0) + k = 0$$

da cui $y'(0) = 0,\ y''(0) = -k < 0$. Si conclude, per noti risultati, che la soluzione ammette nel punto 0 un punto di massimo relativo.

b) Dall'equazione si ha

$$(*) \qquad\qquad y''(x) = -2y'(x) + 3y(x) + |x|$$

Si osservi che la funzione $x \to y(x)$, in quanto soluzione dell'equazione in tutto $\mathbb{R}$, è ivi derivabile due volte, quindi le funzioni $x \to y'(x),\ x \to y(x)$ sono derivabili in $\mathbb{R}$. Poiché la funzione $x \to |x|$ non è derivabile in 0, ne segue che il secondo membro della (*) non è derivabile in 0, e quindi neppure la funzione $x \to y''(x)$ è derivabile in 0. Si conclude pertanto che non esiste $y'''(0)$, cioè la funzione $x \to y(x)$ è derivabile due volte in $\mathbb{R}$ (e non di più).

c) Conviene rispondere alla domanda separatamente nei due intervalli $(-\infty, 0]$ e $[0, +\infty)$; cominciamo dal primo. In esso l'equazione differenziale si può scrivere

$$y''(x) + 2y'(x) + ky(x) = -x$$

e come è noto il suo integrale generale è dato dalla somma dell'integrale generale dell'equazione omogenea associata a cui si aggiunga una soluzione particolare (arbitaria) dell'equazione completa.
Per quanto riguarda l'integrale generale dell'omogenea associata, sappiamo che occorre risolvere preliminarmente l'equazione caratteristica, che nel nostro caso è

$$\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$$

le cui radici sono -3 e 1. Pertanto per noti teoremi l'integrale generale dell'omogenea associata si scrive

$$y(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{x}$$

essendo c_1 e c_2 costanti reali arbitrarie. Occorre ora calcolare una soluzione particolare dell'equazione completa. Essendo il secondo membro, nell'intervallo considerato $(-\infty, 0]$, uguale a $-x$, che è un polinomio di primo grado, dalla teoria segue che esisterà una soluzione particolare dell'equazione completa dello stesso tipo, cioè ancora un polinomio di primo grado: sia esso $y_1^*(x) = Ax + B$, essendo A e B costanti reali da determinare. Imponendo che tale polinomio y_1^* sia soluzione dell'equazione, si ottiene con facili calcoli $A = 1/3$, $B = 2/9$. Da quanto precede si ha allora che nell'intervallo considerato $(-\infty, 0]$ l'integrale generale dell'equazione data si scrive

$$y(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 e^x + (1/3)x + 2/9$$

Piichè nell'esercizio si chiede di calcolare la soluzione particolare del problema di Cauchy, dobbiamo ora determinare le costanti c_1, c_2, finora arbitrarie, in modo che siano soddistatte le condizioni iniziali; con facili calcoli si ottiene $c_1 + c_2 + 2/9 = 1$, $c_1 - 3c_2 + 1/3 = 0$, da cui $c_1 = 1/2$, $c_2 = 5/18$. Si conclude che la soluzione richiesta, nell'intervallo $(-\infty, 0]$, vale

$$\overline{y_1}(x) = (5/18)e^{-3x} + (1/2)e^x + (1/3)x + 2/9$$

Passiamo ora ad effettuare lo stesso calcolo nell'intervallo $[0, +\infty)$. In esso non cambia l'integrale generale dell'equazione omogenea associata, mentre cambia la soluzion particolare dell'equazione data, in quanto ora il secondo membro vale x. Ripetendo lo stesso procedimento seguito nell'intervallo $(-\infty, 0]$ ed omettendo i calcoli per brevità, si ottiene come soluzione particolare dell'equazione completa la funzione

$$y_2^*(x) = (-1/3)x - 2/9$$

e quindi come integrale generale dell'equazione data

$$y(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 e^x - (1/3)x - 2/9$$

Resta infine da determinare le costanti c_1, c_2 in modo da soddisfare le condizioni iniziali; si trova allora, come soluzione particolare nell'intervallo $[0, +\infty)$, la funzione

$$\overline{y_2}(x) = (2/9)e^{-3x} + e^x - (1/3)x - 2/9$$

Si conclude che la soluzione richiesta vale

$$\overline{y}(x) = \begin{cases} (5/18)e^{-3x} + (1/2)e^x + (1/3)x + 2/9 & \text{se } x \leq 0 \\ (2/9)e^{-3x} + e^x - (1/3)x - 2/9 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

È facile verificare che tale funzione $\overline{y}$ è continua e derivabile due volte in $\mathbb{R}$ e soddisfa, come richiesto, le condizioni iniziali nel punto 0.