Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{(x+2)[y(x)-2]^2}{\sqrt{x^2+4x+5}}, \\ y(\alpha) = \beta \end{cases}$$

a) determinare gli eventuali valori dei parametri reali α, β per i quali il problema ha una ed una sola soluzione in un intorno del punto iniziale;
b) determinare, se possibile, la soluzione (o le soluzioni) nei casi: $\alpha = 0$, $\beta = 2$; $\alpha = 0$, $\beta = 0$, precisandone altresì l'insieme di definizione.

Svolgimento. a) Si tratta evidentemente di un'equazione del tipo $y'(x) = f(x)g[y(x)]$, ove $f(x) = (x+2)/\sqrt{x^2+4x+5}$, $g(y) = (y-2)^2$, cioè *a variabili separabili.*

È noto dalla teoria che tale equazione ha una ed una sola soluzione in un intorno del punto iniziale α, almeno nei casi seguenti: f sia continua in un intorno di α e g sia di classe C^1 in un intorno di β, oppure f sia continua in un intorno di α, g sia continua in un intorno di β ed inoltre sia $g(\beta) \neq 0$. Nel nostro caso risulta $f \in C^o(\mathbb{R})$, $g \in C^1(\mathbb{R})$, quindi il problema di Cauchy dato ha una ed una sola soluzione in un intorno del punto iniziale, qualunque siano le costanti α e β.

b) Se $\alpha = 0$, $\beta = 2$, essendo evidentemente $g(2) = 0$, il problema ammette l'unica soluzione costante $y(x) = 2$ $\forall x \in \mathbb{R}$.
Sia ora $\alpha = \beta = 0$. Poiché risulta $g(0) = 4 \neq 0$, possiamo separare le variabili in un intorno di 0 e scrivere l'equazione come segue:

$$\frac{y'(t)}{[y(t)-2]^2} = \frac{t+2}{\sqrt{t^2+4t+5}}$$

Integrando ambo i membri tra 0 e x e tenendo conto delle condizioni iniziali si ha

$$\int_0^x \frac{y'(t)}{[y(t)-2]^2}\,dt = \int_0^x \frac{t+2}{\sqrt{t^2+4t+5}}\,dt$$

e quindi

$$\left[-\frac{1}{y(t)-2}\right]_0^x = \left[\sqrt{t^2+4t+5}\right]_0^x,$$

$$-\frac{1}{y(x)-2} + \frac{1}{-2} = \sqrt{x^2-4x+5} - \sqrt{5}$$

e infine

$$y(x) = 2 + \frac{2}{2\sqrt{5} - 1 - 2\sqrt{x^2+4x+5}}.$$

Un semplice calcolo permette di verificare che in questo caso l'insieme di definizione della soluzione è

$$I = \left(-2 + \sqrt{(17/4) - \sqrt{5}}, +\infty\right). \quad \square$$