Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{y(x)}{x} + x^2 \log(1+|x|), \\ y(-1) = \alpha \end{cases}$$

a) determinare gli eventuali valori del parametro reale α per il quale il problema ha una ed una sola soluzione in un intorno del punto iniziale.
b) Sia ora $\alpha = 0$; calcolare, se esiste, la soluzione, determinando anche il più grande intervallo in cui essa è definita.

Svolgimento. a) Si tratta evidentemente di un'equazione differenziale lineare del primo ordine. Il punto iniziale è -1; i coefficienti dell'equazione sono $a(x) = 1/x$, $b(x) = x^2 \log(1+|x|)$. Entrambi sono funzioni continue in un intorno di -1, quindi segue dalla teoria che il problema dato ammette una ed una sola soluzione, in un intorno del punto iniziale, qualunque sia il valore del parametro reale α.

b) Per la teoria delle equazioni differenziali lineari del primo ordine, la soluzione del problema di Cauchy esiste ed è unica nel più grande intervallo, contenente il punto iniziale, in cui i coefficienti sono continui. Nel nostro caso tale intervallo è evidentemente $(-\infty, 0)$ (poichè $a(x) = 1/x$ non è definita in 0). La soluzione (unica) del problema si calcola colla nota formula; tenendo conto che ci muoviamo nell'intervallo $(-\infty, 0)$ si ha $|x| = -x$ per cui, con facili calcoli:

$$A(x) = \log(-x), \qquad e^{A(x)} = -x$$

ed applicando la nota formula:

$$y(x) = -x \int_{-1}^{x} (-t) \log(1-t)\, dt = x \int_{-1}^{x} t \log(1-t)\, dt = \cdots (\textit{per parti}) =$$

$$= (x/2)(x-1)^2 \log(1-x) - x^2/2 - x^3/4 + x(x-1)\log(1-x) - x/4 \quad \square$$