Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\, y(x) + x + |x| \\ y(\alpha) = 1 \end{cases}$$

a) dire di che tipo è l'equazione;

b) stabilire per quali valori del parametro reale α (se ce ne sono) il problema ha una ed una sola soluzione in un intorno del punto iniziale;

c) determinare l'insieme di definizione delle soluzioni al variare del parametro reale α;

d) determinare, se esiste, la soluzione (o le soluzioni) nel caso $\alpha = 0$;

e) stabilire di che classe è la soluzione di cui al punto precedente.

Svolgimento. a) L'equazione è evidentemente lineare (del primo ordine).

b) I coefficienti dell'equazione sono: $a(x) := x/\sqrt{1+x^2},\ b(x) := x + |x|$. Entrambi sono continui in $\mathbb{R}$, quindi, in base alla teoria, il problema ha una ed una sola soluzione in un intorno del punto iniziale qualunque sia $\alpha \in \mathbb{R}$.

c) Sempre in base alla teoria, le soluzioni di un'equazione differenziale lineare del primo ordine sono definite nel più grande intervallo, contenente il punto iniziale, in cui i coefficienti sono continui. Essendo, come si è detto, tale intervallo uguale ad $\mathbb{R}$, ne segue che le soluzioni sono tutte definite in $\mathbb{R}$ qualunque sia $\alpha \in \mathbb{R}$.

d) Risulta evidentemente

$$b(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ 2x & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Conviene pertanto calcolare la soluzione del problema di Cauchy (per $\alpha = 0$) distinguendo i due casi: $x \leq 0,\ x > 0$.

Una primitiva di $a(x)$ è $A(x) = \sqrt{1+x^2}$, quindi per la nota formula si avrà, nel caso $x \leq 0$:

$$y(x) = e^{A(x)-A(0)} = e^{\sqrt{1+x^2}-1} = (1/e)e^{\sqrt{1+x^2}}$$

mentre se $x > 0$ si ha

$$y(x) = e^{A(x)-A(0)}\left[1 + \int_0^x e^{A(0)-A(t)} b(t)\, dt\right] = (1/e)e^{\sqrt{1+x^2}}\left[1 + 2e\int_0^x te^{-\sqrt{1+t^2}}\, dt\right]$$

L'ultimo integrale si calcola facilmente colla sostituzione $u = \sqrt{1+t^2}$, e si perviene così alla solu (valida per $x > 0$):

$$y(x) = (5/e)e^{\sqrt{1+x^2}} - 2(1 + \sqrt{1+x^2})$$

e) Si può osservare che la funzione $b(x) := x + |x|$ non è di classe $C^1(\mathbb{R})$ in quanto non è derivabile in 0. Segue pertanto dall'equazione differenziale che anche la funzione $y'(x)$ non è derivabile in 0, per cui $y(x) \in C^1(\mathbb{R})$ ma $y(x) \notin C^2(\mathbb{R})$.