

Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) \max\{0, y(x)\} e^x \sin x, \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

a) discutere esistenza ed unicità della soluzione al variare del parametro reale α .

b) Sia $\alpha \neq 0$; determinare, se esiste, la soluzione o le soluzioni al variare di α .

c) Sia ora $\alpha = 0$; determinare, se esiste, la soluzione o le soluzioni.

a) L'equazione differenziale data è a variabili separabili, del tipo $y'(x) = f(x)g[y(x)]$ con $f(x) := e^x \sin x$, $g(t) := t \max\{0, t\}$. Le funzioni f e g sono entrambe definite in $\mathbb{R}$, ed è evidentemente $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, $g \in C^0(\mathbb{R})$. Queste condizioni assicurano l'esistenza di una soluzione, in un intorno del punto iniziale, per ogni valore del parametro α ; per avere l'unicità della soluzione sarebbe sufficiente sapere che $g \in C^1(\mathbb{R})$.

La funzione $g(t) := t \max\{0, t\}$ è evidentemente derivabile (con derivata continua) in un intorno di ogni punto $t_0 \neq 0$; studiamo ora la derivabilità di g in 0. Risulta evidentemente

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq 0, \\ t^2 & \text{se } t > 0 \end{cases}$$

per cui un facile calcolo (passando al limite del rapporto incrementale prima per $t \rightarrow 0^-$ e poi per $t \rightarrow 0^+$) mostra che g è derivabile in 0 e si ha $g'(0) = 0$. Si vede poi facilmente che $g'(t) = 0$ quando $t < 0$, mentre $g'(t) = 2t$ quando $t > 0$; da questi fatti e dal calcolo precedente si conclude che g' è continua in tutto $\mathbb{R}$ e cioè $g \in C^1(\mathbb{R})$. Allora per noti teoremi il problema di Cauchy dato ha una ed una sola soluzione, in un intorno del punto iniziale, qualunque sia il valore del parametro α .

b) Sia ora $\alpha \neq 0$, e cominciamo dal caso $\alpha > 0$. In questo caso in un intorno del punto iniziale è $g[y(x)] = y^2(x) > 0$, quindi possiamo separare le variabili e integrare tra 0 e x (chiamiamo come al solito t la variabile di integrazione). Si ha quindi

$$\int_0^x y'(t)/y^2(t) dt = \int_0^x e^t \sin t dt$$

da cui, con facili passaggi:

$$\left[-\frac{1}{y(t)} \right]_0^x = e^x (\sin x - \cos x)/2 + 1/2$$

e ricordando che $y(0) = \alpha$ infine

$$y(x) = 2\alpha/[2 - \alpha - \alpha e^x (\sin x - \cos x)]$$

Consideriamo ora il caso $\alpha < 0$; in questo caso in un intorno del punto iniziale è $y(x) < 0$ e quindi $g[y(x)] = 0$. L'equazione diventa quindi $y'(x) = 0$ la quale, tenendo conto della condizione iniziale, ha la soluzione costante $y(x) = \alpha$. Tale soluzione è unica per quanto già visto al punto a).

c) Resta solo da considerare il caso $\alpha = 0$; esiste evidentemente la soluzione banale nulla $y(x) = 0$, che è l'unica sempre per quanto provato al punto a).