Sia α un parametro reale positivo e sia f_α la funzione

$$f_\alpha(x) := \frac{e^{\sin x}}{(e^x - \cos x - \arctan x - x^2/2)^\alpha}\,.$$

1) Posto $g(x) := e^x - \cos x - \arctan x - x^2/2$, dimostrare che la funzione g è positiva in $(0, +\infty)$.

2) Determinare gli eventuali valori del parametro reale positivo α per i quali sia convergente l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} f_\alpha(x)\,dx$$

Svolgimento. 1) È ben noto che

$$(1) \qquad\qquad x - \arctan x \ > 0 \qquad \forall x \in (0, +\infty)$$

ciò si può verificare facilmente applicando il teorema di Lagrange alla funzione $x - \arctan x$ e all'intervallo $[0, x]$ con $x > 0$. Si ha poi

$$(2) \qquad\qquad e^x > 1 + x + x^2/2 \qquad \forall x \in (0, +\infty)$$

e questa si verifica scrivendo la formula di Mac Laurin col resto di Lagrange per la funzione e^x, arrestata al secondo termine. Dalle (1), (2) e dal fatto che $\cos x \leq 1\ \forall x \in \mathbb{R}$ si ottiene la positività della funzione g nell'intervallo $(0, +\infty)$.

2) Si verifica facilmente che

$$\lim_{x\to 0} g(x) = g(0) = 0$$

e quindi, tenendo pure conto che $\lim_{x\to 0} e^{\sin x} = e^{\sin 0} = 1$, ne segue

$$\lim_{x\to 0} f_\alpha(x) = +\infty \qquad \forall \alpha > 0$$

Si può pertanto affermare che l'integrale $\int_0^{+\infty} f_\alpha(x)\,dx$ è un integrale improprio in due sensi: primo perché la funzione integranda g non è limitata in un intorno di 0, e secondo perché l'intervallo di integrazione $[0, +\infty)$ è non limitato. In base alla teoria allora si sa che l'integrale improprio $\int_0^{+\infty} f_\alpha(x)\,dx$ è convergente se e solo se sono convergenti separatamente entrambi gli integrali impropri

$$(3) \qquad \int_0^1 f_\alpha(x)\,dx, \qquad\qquad \int_1^{+\infty} f_\alpha(x)\,dx$$

(naturalmente al posto del numero 1 si poteva scegliere un qualunque altro numero positivo x_o per scrivere i due ultimi integrali).

Consideriamo pertanto separatamente i due integrali impropri nella (3). Per quanto riguarda il primo, usando la teoria sugli integrali impropri negli intervalli limitati, si ha che esso converge se l'integranda tende a $+\infty$, per $x \to 0^+$, di ordine $\beta < 1$, mentre diverge positivamente se l'integranda tende a $+\infty$, per $x \to 0^+$, di ordine $\beta \geq 1$. Occorre pertanto studiare l'ordine di infinito della funzione f_α per $x \to 0^+$; poiché si è visto che il suo numeratore ha per limite un numero reale positivo, basterà studiare l'ordine di infinitesimo del denominatore e quindi della funzione g.

A tale scopo ricordiamo lo sviluppo colla formula di Mac Laurin delle funzioni che compaiono nell'espressione di g (è utile in questo caso il resto di Peano):

$e^x = 1+x+x^2/2+x^3/6+o(x^3)$, $\quad \cos x = 1-x^2/2+o(x^3)$, $\quad \arctan x = x-x^3/3+o(x^4)$

da cui si ottiene facilmente

$$g(x) = x^2/2 + o(x^2)$$

e quindi la funzione g è infinitesima, per $x \to 0^+$, di ordine 2. Allora la funzione f_α tende a $+\infty$, per $x \to 0^+$, di ordine 2α. In base a un noto criterio di convergenza per gli integrali impropri sugli intervalli limitati, il primo dei due integrali impropri della (3) è covergente se e solo se $2\alpha < 1$, cioè $\alpha < 1/2$.

Resta da studiare il comportamento del secondo integrale improprio nella (3). In questo caso, come è noto dalla teoria, l'integrale improprio sull'intervallo non limitato converge ad esempio se l'integranda è infinitesima, per $x \to +\infty$, di ordine $\beta > 1$, mentre diverge positivamente se essa è infinitesima di ordine $\beta \leq 1$. Nel nostro caso tuttavia la funzione g tende a $+\infty$, per $x \to +\infty$, di ordine superiore a qualunque potenza di x, a causa della presenza dell'esponenziale e^x. Osservando anche che il numeratore di f_α è una funzione limitata, si ha che la stessa funzione f_α è infinitesima, per $x \to +\infty$, di ordine superiore a qualunque potenza di $1/x$; allora, in base al criterio di convergenza richiamato sopra, il secondo integrale improprio della (3) è convergente per ogni $\alpha > 0$. In base a quanto visto per il primo integrale improprio della (3), si concude che l'integrale improprio di cui alla seconda domanda converge se e solo se $0 < \alpha < 1/2$. $\square$