Esistono funzioni non continue dotate di primitive?

Limitiamoci per semplicità a considerare funzioni definite in un intervallo aperto $I = (a, b)$. Funzioni del tipo di quelle indicate nel titolo esistono certamente, come si è visto nell'esercizio precedente; infatti abbiamo osservato che esistono funzioni derivabili con derivata non continua. La derivata di una di queste funzioni è appunto una funzione non continua dotata di primitiva (che è la funzione di partenza).

Abbiamo pure già osservato che una funzione che abbia, in (almeno) un punto dell'intervallo I, una discontinuità di prima o di terza specie (cioè un salto o una discontinuità eliminabile) non può avere primitive in I. Ne segue che le funzioni come quelle che andiamo cercando (non continue ma dotate di primitive) possono avere, in un punto di I, solo una discontinuità di seconda specie.

Vediamo allora se una delle più semplici funzioni di questo tipo, che potrebbe essere

$$f(x) := \begin{cases} \cos(1/x) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

fa al caso nostro, cioè ammette primitive in $\mathbb{R}$ pur non essendo (ovviamente) continua in 0. A tale scopo consideriamo la funzione già illustrata nell'esercizio precedente, cioè

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Con un facile calcolo si verifica che

$$g'(x) = \begin{cases} 2x \sin(1/x) - \cos(1/x) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

cioè

$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin(1/x) - g'(x) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Una volta espressa in questo modo, si vede che la funzione f è del tipo di quelle che stiamo cercando. Osserviamo infatti come è fatta tale funzione se $x \neq 0$. Il primo addendo, cioè $2x \sin(1/x)$, è una funzione continua se $x \neq 0$ e prolungabile per continuità in 0, quindi dotata di primitive in $\mathbb{R}$. Il secondo addendo è $g'(x)$, che ha come primitiva g in tutto $\mathbb{R}$, come si è già visto prima. Ne segue che f è dotata di primitive in $\mathbb{R}$, pur non essendo ovviamente continua in 0.

Sarebbe un utile esercizio, che richiederebbe solo poche modifiche a quanto ora visto, estendere il risultato precedente alla funzione

$$h(x) := \begin{cases} \sin(1/x) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Lasciamo al lettore tale estensione.