**Esercizio sull'estremo inferiore**

*Sia $\alpha$ un numero reale positivo; dimostrare che si ha*

$$\inf\{|m - n\alpha| : m, n \in \mathbb{N}, m + n \geq 1\} = 0$$

**Svolgimento.** Se $\alpha$ è un numero razionale, il risultato è banale (e in questo caso l'estremo inferiore è anche minimo); supponiamo quindi d'ora in avanti $\alpha$ irrazionale.
Sia $\varepsilon > 0$ arbitrario; la tesi equivale a dimostrare che esistono due numeri naturali (non entrambi nulli) $p, q$ tali che

$$(1) \qquad |p - q\alpha| < \varepsilon$$

A tale scopo consideriamo la successione

$$(2) \qquad j\alpha = [j\alpha] + x_j \quad (j = 1, 2, \dots)$$

dove $[j\alpha]$ indica il più grande numero naturale che non supera $j\alpha$. Se poniamo (per definizione) $n_j := [j\alpha]$, la (2) si può riscrivere

$$(2') \qquad j\alpha = n_j + x_j \quad (j = 1, 2, \dots)$$

Evidentemente è

$$(3) \qquad x_j \in (0, 1) \qquad (j = 1, 2, \dots)$$

e i numeri $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ sono tutti tra loro diversi (essendo $\alpha$ irrazionale).
(Dimostriamo brevemente questa affermazione. Supponiamo per assurdo che esistano due numeri naturali $j, k$ tali che $j < k$ e $x_j = x_k$, cioè (dalla (2$'$))

$$(k - j)\alpha = n_k - n_j$$

assurdo in quanto ne seguirebbe $\alpha = (n_k - n_j)/(k - j)$, ma $\alpha$ è irrazionale).
Dividiamo ora l'intervallo $(0, 1)$ in un numero finito di intervallini di lunghezza (uguale) minore di $\epsilon$; poiché la successione $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ è fatta di infiniti elementi tra loro diversi, esiste (almeno) uno di tali intervallini che contiene a sua volta infiniti elementi diversi della successione. Ne scegliamo uno che chiamiamo $x_r$ e poi un altro che chiamiamo $x_s$; possiamo farlo in modo che sia

$$(4) \qquad s > r, \qquad n_s > n_r$$

Inoltre, essendo $x_r$ e $x_s$ nello stesso intervallino, si ha $|x_r - x_s| < \epsilon$.
Dalla (2$'$) segue allora

$$(5) \qquad |(s - r)\alpha - (n_s - n_r)| < \epsilon$$

La tesi (1) è quindi provata con $p = n_s - n_r,\ q = s - r$. $\square$