Una estensione del teorema di Rolle

È ben noto il **teorema di Rolle**, che si può enunciare ad esempio come segue:

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *(con* $a, b \in \mathbb{R}, a < b$*) una funzione, continua in* $[a, b]$ *e derivabile in* (a, b)*, tale che* $f(a) = f(b)$*. Allora esiste almeno un punto* $c \in (a, b)$ *tale che* $f'(c) = 0$*.*

Si chiede di stabilire una possibile estensione di questo risultato sostituendo all'intervallo $[a, b]$ un intervallo non limitato, ad esempio tutto $\mathbb{R}$. L'enunciato potrebbe essere il seguente:

Corollario. *Sia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, derivabile, tale che esistano i limiti* $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$*e siano uguali. Allora esiste almeno un punto* $c \in \mathbb{R}$ *tale che* $f'(c) = 0$*.*

Cerchiamo di ricondurre la dimostrazione di questa proposizione al teorema di Rolle negli intervalli limitati. Comiciamo a supporre che sia

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$$

Se f è costante in $\mathbb{R}$ ed uguale a ℓ, il risultato è banale, essendo una funzione costante dotata di derivata nulla in tutti i punti.

Supponiamo dunque che esista un punto $x_o \in \mathbb{R}$ tale che $f(x_o) > \ell$ (in caso contrario possiamo ragionare sulla funzione $-f$). Per definizione di limite, essendo $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell$, esiste un numero reale h tale che se $x \leq h$ si abbia

$$f(x) < \frac{f(x_o) + \ell}{2} = \ell + \frac{f(x_o) - \ell}{2}$$

Analogamente, essendo $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$, esiste un numero reale k tale che se $x \geq k$ si abbia

$$f(x) < \frac{f(x_o) + \ell}{2} = \ell + \frac{f(x_o - \ell}{2}$$

(Ovviamente è $h < x_o < k$). Consideriamo ora la restizione di f all'intervallo $[h, k]$. Se risulta $f(h) = f(k)$ possiamo subito applicare il teorema di Rolle classico all'intervallo $[h, k]$ ottenendo la tesi.

Se invece fosse $f(h) < f(k)$, essendo $h < x_o < k$, $f(k) < f(x_o)$, per il teorema dei valori intermedi, applicato all'intervallo $[h, x_o]$, avremmo che in tale intervallo esiste un punto $\overline{x}$ tale che $f(\overline{x}) = f(k)$; applicando il teorema di Rolle all'intervallo $[\overline{x}, k]$ si ottiene la tesi.

(Il caso $f(h) > f(k)$ è analogo e si può lasciare al lettore).

Veniamo ora al caso in cui

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \in \mathbb{R}$$

(se i due limiti fossero invece uguali a $+\infty$ si potrebbe ragionare sulla funzione $-f$). Il procedimento è simile a quello del caso precedente.

Essendo $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, per definizione di limite abbiamo allora che esiste un numero h tale che se $x \le h$ si ha $f(x) < f(0)$; similmente essendo $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ esiste un numero k tale che se $x \ge k$ si ha $f(x) < f(0)$. Consideriamo l'intervallo $[h, k]$ e ragioniamo come nel caso precedente: se $f(h) = f(k)$ si applica il teorema di Rolle all'intervallo $[h, k]$, altrimenti si applica anche il teorema dei valori intermedi come nel caso precedente.

+ + + + + + + + + + + + +

È possibile dimostrare il corollario con un altro procedimento. Si osserva che la differenza tra il teorema di Rolle "classico" e il corollario, consiste nel fatto che nel primo caso il dominio e l'immagine della funzione sono intervalli limitati, mentre per il corollario non è così. In base a questa osservazione, si può cercare di ricondurre le ipotesi del corollario a quelle del teorema con uno o due cambiamenti di variabile.

Cominciamo dal caso in cui

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$$

Consideriamo la restrizione della funzione $t \mapsto \tan t$ all'intervallo $(-\pi/2, \pi/2)$ e il cambiamento di variabile $x = \tan t$ al variare di t in questo intervallo.

Introduciamo la funzione composta

$$\phi(t) := f(\tan t), \quad t \in (-\pi/2, \pi/2)$$

Come è noto, l'immagine della funzione $t \mapsto \tan t$ (con $t \in (-\pi/2, \pi/2)$) è tutto $\mathbb{R}$, quindi colla funzione ϕ otteniamo tutti i valori di f in $\mathbb{R}$. Osserviamo che, per noti teoremi, la funzione $t \mapsto \phi(t)$ è derivabile in $(-\pi/2, \pi/2)$ e inoltre si ha

$$\lim_{t\to-\pi/2} \phi(t) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell$$

$$\lim_{t\to\pi/2} \phi(t) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$$

Possiamo quindi considerare il prolungamento per continuità della funzione ϕ all'intervallo chiuso $[-\pi/2, \pi/2]$:

$$\phi_1(t) := \begin{cases} \phi(t) & \text{se } t \in (-\pi/2, \pi/2), \\ \ell & \text{se } t = -\pi/2, \\ \ell & \text{se } t = \pi/2 \end{cases}$$

Chiaramente la funzione ϕ_1 soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle, quindi esiste un punto

$t_o \in (-\pi/2, \pi/2)$ tale che $\phi_1'(t_o) = 0$

Ma

$$\phi_1'(t_o) = \phi'(t_o) = f'(\tan t_o)(1 + \tan^2 t_o)$$

secondo il teorema di derivazione delle funzioni composte, quindi $f'(\tan t_o) = 0$ e il corollario è provato.

Consideriamo infine il caso in cui

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

In questo caso possiamo introdurre un'altra funzione in modo da ricondurci al caso precedente; per ogni $t \in (-\pi/2, \pi/2)$ poniamo ora

$$\psi(t) := \arctan[f(\tan t)]$$

La funzione ψ, come già ϕ, è derivabile in $(-\pi/2, \pi/2)$, ed è limitata. Inoltre si ha

$$\lim_{t \to -\pi/2} \psi(t) = \lim_{t \to \pi/2} \psi(t) = \pi/2$$

Possiamo allora procedere come nel caso precedente introducendo il prolungamento per continuità di ψ:

$$\psi_1(t) := \begin{cases} \psi(t) & \text{se } t \in (-\pi/2, \pi/2), \\ \pi/2 & \text{se } t = -\pi/2, \\ \pi/2 & \text{se } t = \pi/2 \end{cases}$$

Possiamo applicare il teorema di Rolle alla funzione ψ_1 ottenendo l'esistenza di un punto $t_1 \in (-\pi/2, \pi/2)$ tale che $\psi_1'(t_1) = 0$. Applicando nuovamente il teorema di derivazione delle funzioni composte si ha

$$\psi_1'(t_1) = \psi'(t_1) = \frac{1}{1 + f^2(\tan t_1)} f'(\tan t_1)(1 + \tan^2 t_1)$$

da cui $f'(\tan t_1) = 0$ e il risultato è ottenuto anche questa volta.

Infine, il caso

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

è simile al precedente e può essere lasciato al lettore. $\square$