Esercizio sull'estremo superiore

Dimostrare che si ha

$$\sup\{\sin n : n \in \mathbb{N}\} = 1$$

Svolgimento. Poiché è noto che $\sin x \leq 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, sarà sufficiente dimostrare che, fissato $\epsilon > 0$ arbitrario, esiste $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$(1) \qquad \sin \overline{n} > 1 - \epsilon$$

A tale scopo utilizziamo l'esercizio precedente (più precisamente la conclusione nella forma (5)) con $\alpha = 2\pi$, quindi abbiamo che esistono due numeri naturali p, q tali che

$$(2) \qquad 0 < |p - 2\pi q| < \epsilon$$

Cominciamo a supporre allora che sia, più precisamente

$$(2') \qquad 0 < p - 2\pi q < \epsilon$$

Posto allora $\overline{x} := p - 2\pi q$, sia j il numero naturale tale che

$$j\overline{x} \leq \pi/2 < (j+1)\overline{x}$$

da cui

$$(3) \qquad 0 \leq \pi/2 - j\overline{x} < \overline{x}$$

Ricordiamo ora che, per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ è verificata la disuguaglianza

$$(4) \qquad |\sin x - \sin y| \leq |x - y|$$

che si può facilmente dimostrare colle formule di prostaferesi o col teorema di Lagrange.
Dalle (3), (4) abbiamo allora

$$|1 - \sin(jp)| = |\sin(\pi/2) - \sin(jp - 2\pi jq)| = |\sin(\pi/2) - \sin(j\overline{x})| \leq |\pi/2 - j\overline{x}| < \overline{x} < \epsilon$$

Pertanto la tesi è provata con $\overline{n} = jp$; ciò conclude la dimostrazione nel caso valga la $(2')$.
Supponiamo ora che in luogo della $(2')$ valga la

$$(2'') \qquad 0 < 2\pi q - p < \epsilon$$

In questo caso poniamo $\overline{x} := 2\pi q - p$ e sia j il numero naturale tale che

$$j\overline{x} \leq 3\pi/2 < (j+1)\overline{x}$$

da cui, procedendo come nel caso precedente,

$$|1-\sin(jp)| = |-1-\sin(-jp)| = |\sin(3\pi/2)-\sin(-jp+2\pi jq)| = |\sin(3\pi/2)-\sin(j\overline{x})| \leq |3\pi/2-j\overline{x}| < \overline{x} < \epsilon$$

La tesi è pertanto completamente dimostrata. $\square$