

## Esercizio sull'estremo superiore

*Dimostrare che si ha*

$$\sup\{\sin n : n \in \mathbb{N}\} = 1$$

**Svolgimento.** Poiché è noto che  $\sin x \leq 1$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ , sarà sufficiente dimostrare che, fissato  $\epsilon > 0$  arbitrario, esiste  $\bar{n} \in \mathbb{N}$  tale che

$$(1) \quad \sin \bar{n} > 1 - \epsilon$$

A tale scopo utilizziamo l'esercizio precedente (più precisamente la conclusione nella forma (5)) con  $\alpha = 2\pi$ , quindi abbiamo che esistono due numeri naturali  $p, q$  tali che

$$(2) \quad 0 < p - 2\pi q < \epsilon$$

Posto allora  $\bar{x} := p - 2\pi q$ , sia  $j$  il numero naturale tale che

$$j\bar{x} \leq \pi/2 < (j+1)\bar{x}$$

da cui

$$(3) \quad 0 \leq \pi/2 - j\bar{x} < \bar{x}$$

Ricordiamo ora che, per ogni  $x, y \in \mathbb{R}$  è verificata la disuguaglianza

$$(4) \quad |\sin x - \sin y| \leq |x - y|$$

che si può facilmente dimostrare colle formule di prostaferesi o col teorema di Lagrange.

Dalle (3), (4) abbiamo allora

$$|1 - \sin(jp)| = |\sin(\pi/2) - \sin(jp - 2\pi jq)| = |\sin(\pi/2) - \sin(j\bar{x})| \leq |\pi/2 - j\bar{x}| < \bar{x} < \epsilon$$

Pertanto la tesi è provata con  $\bar{n} = jp$ .  $\square$