Data la funzione

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{\log(1+yx^2)}{\sqrt[3]{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ k & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) determinare gli eventuali valori del parametro reale k per i quali la funzione è continua in $(0,0)$;
b) determinare gli eventuali valori del parametro reale k per i quali la funzione è differenziabile in $(0,0)$;
c) se esiste, calcolare $f'_y(1,1)$.

Svolgimento. a) Per definizione di funzione continua, f è continua in $(0,0)$ se e solo se risulta

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = k.$$

Si tratta dunque di calcolare questo limite.
Osserviamo innanzitutto che sugli assi ($x=0$ oppure $y=0$) la funzione si annulla, quindi si può già concludere che il limite cercato, se esiste, vale 0.
Consideriamo ora l'insieme

$$I_1 := I_f \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; xy \neq 0\}$$

essendo $I_f := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; yx^2 > -1\}$ l'insieme di definizione di f. Nell'insieme I_1 è possibile moltiplicare e dividere per yx^2, quindi si può scrivere

$$f(x,y) = \frac{\log(1+yx^2)}{yx^2} \frac{yx^2}{\sqrt[3]{x^2+y^2}}, \quad (x,y) \in I_1$$

Essendo, come è noto, $\lim_{x\to 0}[\log(1+x)]/x = 1$, ne segue che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\log(1+yx^2)}{xy^2} = 1$$

(ove il punto (x,y) appartiene, come si è detto, ad I_1). Pertanto resta da calcolare il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{yx^2}{\sqrt[3]{x^2+y^2}}$$

La funzione si può riscrivere

$$\frac{yx^2}{\sqrt[3]{x^2+y^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot x^2(x^2+y^2)^{1/6}$$

Il rapporto $|y/\sqrt{x^2+y^2}|$ è limitato (da 1), mentre l'altro fattore $x^2(x^2+y^2)^{1/6}$ tende evidentemente a 0 per $(x,y) \to (0,0)$. Allora la funzione f ha anch'essa limite 0 per $(x,y) \to (0,0)$ almeno nell'insieme I_1. Si è già peraltro osservato che la f è nulla in $I_f \backslash I_1$, quindi si può concludere che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

La risposta alla domanda a) è quindi la seguente: la funzione data è continua in $(0,0)$ se e solo se $k=0$.

b) È noto che condizione necessaria (non sufficiente) affinché una funzione sia differenziabile in un punto, è che essa sia continua in quel punto. Ne consegue che, in base alla risposta alla domanda a), la nostra funzione può essere differenziabile nel punto $(0,0)$ solo se $k=0$.

Si è già osservato che la funzione f (con $k = 0$) è nulla sugli assi; di conseguenza, come subito si verifica, esistono e sono nulle le sue derivate parziali nell'origine. Pertanto, in base alla definizione, f sarà differenziabile in $(0, 0)$ se e solo se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

cioè

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\log(1+yx^2)}{(x^2+y^2)^{5/6}} = 0$$

Tale limite è simile a quello calcolato in precedenza; rifacendo un ragionamento analogo si osserva che la funzione è nulla se $xy = 0$, mentre se $xy \neq 0$ si può scrivere

$$\frac{\log(1+yx^2)}{(x^2+y^2)^{5/6}} = \frac{\log(1+yx^2)}{yx^2} \cdot \frac{x^2}{x^2+y^2} \cdot y(x^2+y^2)^{1/6}$$

In tale prodotto, il primo rapporto tende a 1 (come si è già osservato in precedenza), il secondo rapporto è evidentemente limitato, mentre il terzo fattore tende a 0 per $(x, y) \to (0, 0)$.

Si ha pertanto

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

e la funzione data, per $k = 0$, è differenziabile in $(0, 0)$.