Sia data la funzione

$$f(x,y) := x^4 + kxy + y^2 + y$$

essendo k un parametro reale.

a) È possibile determinare il parametro k in modo che la funzione f abbia in $(3,1)$ un punto di massimo o minimo relativo?

b) Sia d'ora in avanti $k = -1$. Stabilire se la funzione f è limitata nell'insieme

$$A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y^2, -1 \le y \le 2\}$$

c) Data la funzione $g(x,y) := f(x,y)/\sqrt[4]{x^2+y^2}$ stabilire se essa è prolungabile per continuità nell'origine;

d) nel caso di risposta affermativa alla domanda precedente, stabilire se la funzione g, prolungata nell'origine definendola ivi uguale al suo limite, è differenziabile nell'origine.

Svolgimento. a) Si osserva che la funzione f è un polinomio, quindi una funzione di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Per noti teoremi, se il punto $(3,1)$ è di massimo o minimo relativo per f, in esso deve annullarsi il gradiente di f (trattasi infatti di una condizione necessaria). Con un facile calcolo si vede che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(3,1) = 108 + k, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(3,1) = 3k + 3$$

Evidentemente non c'è nessun valore reale di k per cui entrambe queste derivate si annullano: la risposta alla prima domanda è no.

b) L'insieme A è un arco di parabola. Poiché y è compreso tra -1 e 2, mentre $x = y^2$, evidentemente sia x sia y sono limitati in A quindi A è limitato. Esso è anche chiuso in quanto ottenuto da uguaglianze o disuguaglianze deboli (cioè del tipo $\le$ o $\ge$) tra funzioni continue (nel nostro caso la funzione continua è $x = y^2$). Come si è già osservato, la funzione f è continua in $\mathbb{R}^2$ quindi anche in A; si può applicare il teorema di Weierstrass ed f è dotata in A di almeno un punto di massimo assoluto e di almeno un punto di minimo assoluto, quindi è limitata in A.

Si poteva facilmente arrivare alla stessa conclusione anche senza usare il teorema di Weierstrass. Infatti in A si ha $-1 \le y \le 2$ e quindi $0 \le x \le 4$; cioè l'insieme A è contenuto nel rettangolo $B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le x \le 4, -1 \le y \le 2\}$. Ne segue, con facili calcoli, che in B valgono le disuguaglianze:

$$0 \le x^4 \le 256, \ -8 \le -xy \le 4, \ 0 \le y^2 \le 4, \ -1 \le y \le 2$$

da cui, sommando, si ottiene $-9 \le f(x,y) \le 266$. Si conclude che f è limitata in B e quindi anche in A.

c) La funzione g è definita in tutto il piano tranne che nell'origine $(0,0)$; ha quindi senso chiedersi se è prolungabile per continuità nell'origine cioè se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = \ell \in \mathbb{R}$$

Teniamo conto delle ovvie disuguaglianze

$$\sqrt[4]{x^2+y^2} \geq \sqrt[4]{x^2} = \sqrt{|x|}, \quad \sqrt[4]{x^2+y^2} \geq \sqrt[4]{y^2} = \sqrt{|y|}$$

da cui banalmente

$$|g(x,y)| \leq \frac{x^4+|xy|+y^2+|y|}{\sqrt[4]{x^2+y^2}} \leq$$

$$\leq \frac{x^4}{\sqrt{|x|}} + \frac{|x|}{\sqrt{|x|}}|y| + \frac{|y|}{\sqrt{|y|}}(1+|y|) = |x|^{7/2} + |x|^{1/2}|y| + |y|^{1/2}(1+|y|)$$

È chiaro che il secondo membro della precedente disuguaglianza tende a 0 per $(x,y) \to (0,0)$, quindi la funzione g è prolungabile per continuità nell'origine ponendola ivi uguale a zero.

d) È noto che condizione necessaria per la differenziabilità in punto (per una funzione di più variabili) è che in quel punto la funzione ammetta le derivate parziali.

Verifichiamo se la funzione g, prolunata nell'origine definendola ivi uguale a zero, ammette nell'origine ad esempio la derivata parziale rispetto ad y. Occorre pertanto calcolare il limite

$$\lim_{k\to 0} \frac{g(0,k)-g(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{k^2+k}{k\sqrt[4]{k^2}} = \lim_{k\to 0}\left(\frac{k}{\sqrt{|k|}} + \frac{1}{\sqrt{|k|}}\right)$$

e se tale limite esiste reale, esso è la derivata parziale di g rispetto a y calcolata in $(0,0)$. Il limite vale evidentemente $+\infty$, per cui g, prolungata nell'origine definendola ivi uguale al suo limite 0, non ammette in $(0,0)$ la derivata parziale rispetto ad y e quindi g non è differenziabile nell'origine.