Sia data la funzione

$$f(x,y) := \frac{x^2 y}{(\arctan x)^4 + y^2}$$

a) stabilire se f è prolungabile per continuità in $(0,0)$;

b) stabilire se la funzione f è limitata nel suo insieme di definizione.

c) Sia ora $g(x,y) := \sqrt{|x|+|y|}f(x,y)$; stabilire se g è prolungabile per continuità in $(0,0)$;

d) stabilire se esiste, ed in caso affermativo calcolare, $\lim_{(x,y)\to\infty} g(x,y)$.

Svolgimento. a) La funzione data è nulla sugli assi cartesiani (cioè se $x = 0$ e $y \neq 0$ oppure se $y = 0$ e $x \neq 0$, mentre non è definita in $(0,0)$), pertanto se esiste $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ tale limite è nullo. Si osserva però che la restrizione della funzione alla parabola di equazione $y = x^2$ ha limite

$$\lim_{x\to 0} f(x,x^2) = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{(\arctan x)^4 + x^4} = 1/2$$

Da ciò si deduce che non esiste il $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, quindi f non è prolungabile per continuità nell'origine.

b) Consideriamo la restrizione della funzione alla curva di equazione $y = (\arctan x)^2$ (con $x \neq 0$). Si ha allora

$$\lim_{x\to+\infty} f(x,(\arctan x)^2) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2(\arctan x)^2}{2(\arctan x)^4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{2(\arctan x)^2} = +\infty$$

Ciò prova che la funzione data non è limitata nel suo insieme di definizione.

c) Per $x \neq 0$ si può scrivere

$$f(x,y) = (x/\arctan x)^2 \frac{(\arctan x)^2 y}{(\arctan x)^4 + y^2}$$

Esaminiamo entrambi i fattori in un intorno dell'origine. Per quanto riguarda il primo, si ha banalmente

$$\lim_{x\to 0}(x/\arctan x)^2 = 1$$

quindi il primo fattore è limitato in un intorno dell'origine intersecato con $(\mathbb{R}\setminus\{0\})\times\mathbb{R}$. Per quanto riguarda il secondo fattore, si ha

$$\left|\frac{(\arctan x)^2 y}{(\arctan x)^4 + y^2}\right| \leq 1/2 \quad \forall (x,y) \neq (0,0)$$

come si può facilmente verificare con un calcolo algebrico. Tenendo anche conto che $f(0,y) = 0$ per ogni $y \in \mathbb{R}$, ne segue che la funzione f è limitata in un intorno bucato dell'origine, e dal fatto che la funzione $(x,y) \to \sqrt{|x|+|y|}$ è evidentemente (continua e) infinitesima per $(x,y) \to (0,0)$, si conclude, per un noto teorema, che la funzione g

è infinitesima nell'origine e quindi ivi prolungabile per continuità, definendola in $(0,0)$ uguale al suo limite. In altre parole la funzione

$$g_1(x,y) := \begin{cases} g(x,y) & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

è l'unico prolungamento per continuità della funzione g in $(0,0)$.

d) La funzione g, come la f, è nulla sugli assi, quindi anche il suo limite all'infinito, se esiste, deve essere nullo. Tuttavia sulla restrizione di g alla curva di equazione $y = (\arctan x)^2$ (con $x \neq 0$) si ha

$$\lim_{x\to+\infty} g(x, (\arctan x)^2) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{|x| + (\arctan x)^2}\, \frac{x^2}{2(\arctan x)^2} = +\infty$$

Si conclude che non esiste il $\lim_{(x,y)\to\infty} g(x,y)$. $\square$

(Questo svolgimento è stato scritto colla collaborazione e le correzioni della prof. Ada Aruffo, che volentieri ringrazio.)