Esercizio. Data la funzione

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{e^{xy} - 1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{se } x > 0, \\ \sqrt{1 - \cos(xy)} & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

- 1) stabilire se f è continua in $(0, 0)$;
- 2) stabilire se esistono le derivate parziali di f in $(0, 0)$ ed in caso affermativo calcolarle;
- 3) stabilire se esiste la derivata direzionale $(\partial f / \partial Q)(0, 0)$ essendo Q il vettore $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ ed in caso affermativo calcolarla;
- 4) stabilire se f è differenziabile in $(0, 0)$;
- 5) stabilire se f è continua in $(0, 1)$.

Svolgimento. 1) Osserviamo innanzi tutto che la funzione data è evidentemente definita in tutto $\mathbb{R}^2$. Come si vede, la funzione è definita con espressioni diverse a seconda che sia $x > 0$ o $x \leq 0$; per comodità poniamo

$$f_1(x, y) := \frac{e^{xy} - 1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad f_2(x, y) := \sqrt{1 - \cos(xy)}$$

È chiaro comunque che se le due funzioni f_1, f_2 hanno ambedue lo stesso limite per $(x, y) \rightarrow (0, 0)$, anche f avrà lo stesso limite (lasciamo al lettore la facile dimostrazione di ciò). Ora si ha, se $(x, y) \neq (0, 0)$:

$$(1) \quad \left| \frac{e^{xy} - 1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq \left| \frac{e^{|xy|} - 1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq \left| \frac{e^{x^2+y^2} - 1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| = \left| \frac{e^{x^2+y^2} - 1}{x^2 + y^2} \right| \sqrt{x^2 + y^2}$$

(La disuguaglianza precedente è ovvia se $xy \geq 0$, perché in tal caso basta osservare che la funzione esponenziale è strettamente crescente e vale 1 nel punto 0. Nel caso $xy < 0$ resta da dimostrare solo la prima parte della disuguaglianza, per la quale osserviamo che, se $t < 0$, si ha $1 - e^t < e^{-t} - 1$. Lasciamo anche questa verifica al lettore per esercizio).

Nella (1) prendiamo in esame l'ultimo membro; osserviamo che

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{x^2+y^2} - 1}{x^2 + y^2} = 1$$

per un noto limite notevole, mentre $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{x^2 + y^2} = 0$. Si conclude pertanto che risulta

$$(2) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_1(x, y) = 0$$

Si poteva pervenire allo stesso risultato ragionando in un altro modo. La funzione f_1 , che è definita in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, è evidentemente nulla sugli assi cartesiani (cioè se $x = 0, y \neq 0$ oppure se $y = 0, x \neq 0$). Studiamo dunque il comportamento della funzione fuori degli assi, cioè se $x \neq 0$ e anche $y \neq 0$. In tal caso si può scrivere

$$\left| \frac{e^{xy} - 1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| = \left| \frac{e^{xy} - 1}{xy} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| = \left| \frac{e^{xy} - 1}{xy} \right| \left| \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| |y|$$

Dei tre fattori dell'ultimo membro, il primo ha per limite 1 (per $(x, y) \rightarrow (0, 0)$) ricordando un noto limite notevole; il secondo fattore è evidentemente limitato (da 1) e il terzo è infinitesimo, da cui si ottiene nuovamente la (2).

Per quanto riguarda l'altra espressione che definisce f (per $x \leq 0$), essa è definita e continua in $(0, 0)$, dove vale 0, quindi si ha

$$(3) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_2(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{1 - \cos(xy)} = 0$$

Dalle (2) e (3), osservando anche che $f(0, 0) = 0$, concludiamo che f è continua in $(0, 0)$.

2) Si ha evidentemente $f(x, 0) = f(0, y) = 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, cioè la funzione è nulla sugli assi, quindi le derivate parziali di f , calcolate in $(0, 0)$, esistono e sono nulle.

3) Per definizione, la derivata direzionale da studiare è il limite

$$(4) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\sqrt{2}t/2, \sqrt{2}t/2) - f(0, 0)}{t}$$

Poiché l'espressione di f è diversa a seconda che sia $x > 0$ o $x \leq 0$, conviene studiare separatamente i limiti destro e sinistro. Si ha:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(\sqrt{2}t/2, \sqrt{2}t/2) - f(0, 0)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^{t^2/2} - 1}{t^2} = 1/2 \\ \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f(\sqrt{2}t/2, \sqrt{2}t/2) - f(0, 0)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1 - \cos(t^2/2)}}{t} = 0 \end{aligned}$$

Poiché i limiti destro e sinistro sono diversi, la derivata direzionale di cui alla domanda non esiste.

4) Per noti teoremi, se una funzione di due variabili è differenziabile in un punto, allora in quel punto esistono tutte le derivate direzionali. Alla luce di ciò, per il risultato di cui al punto precedente, la funzione f non è differenziabile in $(0, 0)$.

5) Le funzioni f_1 e f_2 , precedentemente introdotte, sono evidentemente definite e continue in $(0, 1)$, ed entrambe si annullano in tale punto. Da ciò segue banalmente che anche f è continua in $(0, 1)$.