Sia data la funzione di due variabili reali

$$f(x,y) := \frac{(e^y - 1)\sin^2 x}{|x| + \sqrt{1 - \sin y}}$$

a) determinarne l'insieme di definizione;

b) stabilire se la funzione è prolungabile per continuità in $(0, \pi/2)$*;*

c) in caso affermativo, stabilire se la funzione così prolungata è differenziabile nello stesso punto;

d) stabilire se la funzione è prolungabile per continuità in tutti i punti in cui non è definita;

e) stabilire se la funzione è limitata nel suo insieme di definizione.

Svolgimento. a) Il numeratore della funzione f è evidentemente definito per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, e così pure il denominatore, quindi la funzione è definita in tutti i punti di $\mathbb{R}^2$ nei quali il denominatore non si annulla. Tale denominatore è la somma di due funzioni entrambe non negative, quindi il denominatore si annulla solo nei punti nei quali si annullano entrambi gli addendi. Ora è $|x| = 0$ se e solo se $x = 0$, mentre è $\sin y = 1$ se e solo se $y = \pi/2 + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Ne segue che il denominatore si annulla nei punti del tipo $(0, \pi/2 + 2k\pi)$ ($k \in \mathbb{Z}$), quindi l'insieme di definizione I di f è

$$I = \mathbb{R}^2 \setminus \cup_{k \in \mathbb{Z}} \, (0, \pi/2 + 2k\pi)$$

b) La funzione data si annulla evidentemente nei punti di I nei quali $x = 0$, quindi in ogni intorno del punto $(0, \pi/2)$ ci sono punti in cui f si annulla; ciò basta per affermare che, se esiste il limite $\lim_{(x,y)\to(0,\pi/2)} f(x, y)$, tale limite vale 0. Inoltre risulta, per ogni $(x, y) \in I$:

$$0 \le |f(x,y)| \le \frac{|e^y - 1| \sin^2 x}{|x|} = |e^y - 1| \cdot |\sin x| \cdot \left| \frac{\sin x}{x} \right|$$

dalla quale, per noti teoremi e risultati, passando al limite per $(x, y) \to (0, \pi/2)$, si ottiene che

$$\lim_{(x,y)\to(0,\pi/2)} f(x,y) = 0$$

Ciò significa che la funzione data è prolungabile per continuità nel punto $(0, \pi/2)$, definendola ivi uguale a 0.

c) È noto che condizione necessaria (non sufficiente) par la differenziabilità in un punto di una funzione di due o più variabili, è che in tale punto esistano le derivate parziali. La funzione da considerare è il prolungamento continuo della f nel punto $(0, \pi/2)$ come definito alla domanda precedente, cioè

$$f_1(x,y) := \begin{cases} f(x,y) & \text{se } (x,y) \in I \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0, \pi/2) \end{cases}$$

Risulta:

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)_+(0,\pi/2) := \lim_{h\to 0^+}\frac{f_1(h,\pi/2)-f_1(0,\pi/2)}{h} = \lim_{h\to 0^+}(e^{\pi/2}-1)\frac{\sin^2 h}{h^2} = e^{\pi/2}-1$$

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)_-(0,\pi/2) := \lim_{h\to 0^-}\frac{f_1(h,\pi/2)-f_1(0,\pi/2)}{h} = \lim_{h\to 0^+}(e^{\pi/2}-1)\frac{\sin^2 h}{-h^2} = -e^{\pi/2}+1$$

Da ciò si vede che la derivata parziale destra rispetto a x della funzione f_1 nel punto $(0,\pi/2)$ è diversa dalla derivata parziale sinistra nello stesso punto, quindi la funzione f_1 non ammette, nel punto $(0,\pi/2)$, la derivata parziale rispetto a x. Si conclude che f_1 non è differenziabile in tale punto.

d) Indichiamo con y_o un qualunque punto del tipo $\pi/2+2k\pi$ ($k\in\mathbb{Z}$), cioè tale che f non sia definita in $(0,y_o)$. Lo stesso calcolo che si è fatto alla domanda b) per il punto $(0,\pi/2)$ si può rifare per i punti $(0,y_o)$, cioè

$$0 \le |f(x,y)| \le \frac{|e^y-1|\sin^2 x}{|x|} \qquad \forall (x,y)\in I$$

quindi

$$0 \le \lim_{(x,y)\to(0,y_o)}|f(x,y)| \le \lim_{(x,y)\to(0,y_o)}\frac{|e^y-1|\sin^2 x}{|x|} = \lim_{y\to y_o}|e^y-1|\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{|x|} = |e^{y_o}-1|\cdot 0 = 0$$

Ne segue che f è prolungabile per continuità (definendola ivi uguale a 0) in tutti i punti dove non è definita.

e) Consideriamo ad esempio la restrizione della funzione f alla retta $x=\pi/2$; si ha

$$f(\pi/2,y) = \frac{e^y-1}{\pi/2+\sqrt{1-\sin y}} \ge \frac{e^y-1}{\pi/2+\sqrt{2}}$$

L'ultimo membro di questa disuguaglianza è una funzione della sola y, evidentemente non superiormente limitata (si ha $\lim_{y\to+\infty}e^y=+\infty$). Si conclude che f non è limitata in I.