Data la funzione

$$f(x, y) := \sqrt{1 - \cos(x - y)} + \frac{(e^{x+y} - 1)\arctan(xy)}{x^2 - xy + y^2}$$

a) determinarne l'insieme di definizione;

b) stabilire se essa è prolungabile per continuità nell'origine $(0, 0)$*;*

c) in caso affermativo, stabilire se la funzione così prolungata è differenziabile nell'origine.

Svolgimento. a) Poniamo per comodità

$$f_1(x, y) := \sqrt{1 - \cos(x - y)}, \qquad f_2(x, y) := \frac{(e^{x+y} - 1)\arctan(xy)}{x^2 - xy + y^2}$$

in modo tale che $f = f_1 + f_2$. Per quanto riguarda f_1, si osserva che la funzione $x \to \cos x$ assume i suoi valori nell'intervallo $[-1, 1]$, quindi il radicando che compare nella funzione f_1 è sempre non negativo, e ne segue che la funzione f_1 è definita in tutto $\mathbb{R}^2$.
Consideriamo ora la funzione f_2. Evidentemente il numeratore è sempre definito, quindi si dovranno togliere, dal suo insieme di definizione, solo gli eventuali punti in cui si annulla il denominatore.
Ovviamente esso si annulla nell'origine $(0, 0)$: dobbiamo capire se esso si annulla anche in altri punti. Con un semplice calcolo si osserva che

$$x^2-xy+y^2 = (1/2)(x^2+y^2)+(1/2)(x^2+y^2-2xy) = (1/2)(x^2+y^2)+(1/2)(x-y)^2 \geq (1/2)(x^2+y^2)$$

quindi il denominatore si annulla solo nell'origine. La risposta alla prima domanda è che la funzione f è definita nell'insieme

$$I_f := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \neq (0, 0)\}$$

b) Ricordiamo che la funzione f si dice prolungabile per continuità nell'origine se il limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ esiste reale. La domanda ha senso perché, in base alla risposta precedente, l'origine $(0, 0)$ è certamente un punto di accumulazione per I_f; anche per questa domanda può essere comodo studiare separatamente le funzioni f_1 e f_2.
Per quanto riguarda f_1, visto che le funzioni in gioco (coseno e radice quadrata) sono continue e inoltre $f_1(0, 0) = 0$, abbiamo banalmente

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_1(x, y) = 0$$

Per quanto riguarda f_2, osserviamo intanto che sia il numeratore sia il denominatore si annullano nell'origine, quindi il limite si presenta sotto la forma indeterminata $0/0$. Osserviamo pure che, essendo $\arctan 0 = 0$, il numeratore si annulla sugli assi cartesiani $x = 0$ e $y = 0$; allora in ogni intorno dell'origine esistono punti in cui f_2 si annulla, e possiamo già affermare che il limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_2(x, y)$ se esiste vale zero. Proviamo a maggiorare (in modulo) la funzione con altre funzioni chiaramente infinitesime. Ricordando che $|\arctan t| \leq |t|\ \forall t \in \mathbb{R}$, e ricordando pure la disuguaglianza relativa al denominatore scritta in precedenza, abbiamo:

$$|f_2(x, y)| = \left|\frac{\arctan(xy)(e^{x+y} - 1)}{x^2 - xy + y^2}\right| \leq \frac{2|xy|}{x^2 + y^2}|e^{x+y} - 1|$$

In questa ultima espressione, chiaramente la prima frazione non supera 1, mentre l'altro fattore è evidentemente infinitesimo per $(x, y) \to (0, 0)$. Si conclude, come si voleva, che anche la funzione f_2 è infinitesima per $(x, y) \to (0, 0)$, e infine pure $f = f_1 + f_2$ lo è.
La risposta alla domanda b) è quindi la seguente: f è prolungabile per continuità in $(0, 0)$ (definendola ivi uguale al suo limite, 0).

c) Indichiamo ad esempio con f_o la funzione ottenuta prolungando per continuità f nell'origine (vedi punto precedente):

$$f_o(x, y) := \begin{cases} f(x, y) & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Dobbiamo stabilire se tale funzione è differenziabile nell'origine $(0, 0)$; a tale scopo ricordiamo che condizione necessaria (non sufficiente) affinché una funzione di due variabili sia differenzaibile in un punto, è che in tale punto esistano le derivate parziali prime. Cominciamo pertanto a verificare se esiste la derivata parziale di f_o rispetto ad x, calcolata in $(0, 0)$, cioè il limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f_o(h, 0) - f(0, 0)}{h}$$

Con facili calcoli abbiamo

$$\lim_{h \to 0} \frac{f_o(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{1 - \cos h}}{h}$$

ma si vede subito che tale limite non esiste, in quanto

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{\sqrt{1 - \cos h}}{h} = \sqrt{2}/2, \quad \lim_{h \to 0^-} \frac{\sqrt{1 - \cos h}}{h} = -\sqrt{2}/2$$

Poiché non esiste la derivata parziale di f_o rispetto ad x calcolata in $(0, 0)$, la funzione non è differenziabile in tale punto.