Sia $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *la funzione definita da*

$$f(x,y) = \begin{cases} x^3 - y^3 & \textit{se } y \geq 0 \\ x^3 + y^3 & \textit{se } y < 0 \end{cases}$$

(a) *Determinare l'insieme dei punti di* $\mathbb{R}^2$ *che sono di continuità per* f.

(b) *Determinare l'insieme dei punti di* $\mathbb{R}^2$ *che sono di differenziabilità per* f.

(c) *Stabilire se esiste il* $\lim_{(x,y)\to\infty} f(x,y)$ *ed, in tal caso, calcolarlo.*

(d) *Determinare* $\inf f$ *e* $\sup f$. *Stabilire se* f *assume punti di estremo relativo o assoluto su* $\mathbb{R}^2$ *ed, in tal caso, determinarli.*

(e) *Stabilire se* f *assume punti di estremo relativo o assoluto su* $[0,1] \times [0,1]$ *ed, in tal caso, determinarli, precisando se sono punti di massimo o di minimo, relativo o assoluto.*

Svolgimento. Osserviamo preliminarmente che la funzione data può essere scritta equivalentemente (in base alla definizione di valore assoluto):

$$f(x,y) = x^3 - |y|^3$$

a) È evidente che la funzione è definita e continua in $\mathbb{R}^2$ (infatti è composta di un polinomio e del valore assoluto, che sono funzioni continue).

b) Si vede anche facilmente che la funzione data ha le derivate parziali definite in $\mathbb{R}^2$ e ivi continue. Ciò è evidente per la derivata parziale rispetto ad x, mentre per quella rispetto ad y potrebbe venire il dubbio che non esista o non sia continua quando $y = 0$; basta una semplice verifica per ottenere l'esistenza e la continuità anche in questo caso. A questo punto un noto teorema assicura la differenziabilità di f in tutti i punti di $\mathbb{R}^2$.

c) Con semplici calcoli si ottiene che, ad esempio,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x,0) = +\infty, \qquad \lim_{y\to+\infty} f(0,y) = -\infty$$

da cui si deduce immediatamente che non esiste il $\lim_{(x,y)\to\infty} f(x,y)$.

d) Dai limiti calcolati nel punto precedente si deduce che $\sup f = +\infty$ e $\inf f = -\infty$, quindi non esistono punti di massimo o minimo assoluto per f. Per quanto riguarda gli eventuali punti di massimo o minimo relativo, per noti teoremi essi si possono solo trovare nei punti in cui si annulli il gradiente di f. Un facile calcolo rivela che l'unico punto in cui si annullano le derivate parziali di f è l'origine $(0,0)$; tuttavia è immediato osservare che tale punto non è né di massimo né di minimo relativo, in quanto la funzione è positiva in ogni intorno (bucato) di $(0,0)$ sull'asse x mentre è negativa in ogni intorno (bucato) di $(0,0)$ sull'asse y.

e) L'insieme $K := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ è chiuso e limitato, quindi per il teorema di Weierstrass la funzione f (continua) ammette in K almeno un punto di massimo assoluto e almeno un punto di minimo assoluto. Osserviamo anche che, per quanto verificato in precedenza, all'interno del quadrato K il gradiente di f non si annulla, quindi i punti di massimo e minimo assoluto di f in K devono trovarsi sulla frontiera di

K (costituita dai lati del quadrato). Osserviamo anche che la restrizione della funzione f a ciascuno dei lati del quadrato dà luogo a una funzione strettamente monotona, quindi i punti di massimo o minimo assoluto di f in K devono trovarsi nei vertici di K. Allora un confronto diretto fornisce l'esistenza del punto di massimo assoluto nel punto $P_1(1, 0)$ e il punto di minimo assoluto nel punto $P_2(0, 1)$. Tali punti di massimo e minimo assoluto sono unici, e non esistono altri punti di massimo o minimo relativo. $\square$