Data la funzione

$$f(x,y) := \frac{e^{xy}-1}{\log(1+|x|)+|\sin y|}$$

a) determinarne l'insieme di definizione I*;*

b) stabilire se la funzione è prolungabile per continuità in $(0,0)$*;*

c) in caso affermativo, stabilire se la funzione così prolungata è differenziabile in $(0,0)$*.*

Svolgimento. a) Il numeratore del rapporto è una funzione definita in tutto $\mathbb{R}^2$; il denominatore pure, essendo evidentemente $1+|x|>0$ per ogni $x\in\mathbb{R}$. Occorre ora imporre che il denominatore non si annulli; poichè sia $\log(1+|x|)$ sia $|\sin y|$ sono quantità non negative, basterà imporre che i due addendi non si annullino contemporaneamente. Ora il logaritmo si annulla solo quando il suo argomento vale 1, quindi la funzione $\log(1+|x|)$ si annulla solo per $x=0$; la funzione seno si annulla nei punti del tipo $k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$. In conlusione il denominatore si annulla nei punti del tipo $(0,k\pi)(k\in\mathbb{Z})$, pertanto risulta

$$I=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x,y)\neq(0,k\pi), k\in\mathbb{Z}\}=\mathbb{R}^2\backslash\{\cup_{k\in\mathbb{Z}}(0,k\pi)\}$$

b) Si osserva immediatamente che la funzione data è nulla sugli assi, quindi, se essa ammette limite per $(x,y)\to(0,0)$, tale limite è necessariamente zero. Risulta evidentemente, in ogni punto dell'insieme I fuori degli assi cartesiani (dove f si annulla):

$$|f(x,y)|\leq\left|\frac{e^{xy}-1}{\log(1+|x|)}\right|=\left|\frac{e^{xy}-1}{xy}\right|\left|\frac{|x|}{\log(1+|x|)}\right||y|$$

Nell'ultimo membro della precedente disuguaglianza, il primo rapporto tende a 1 per $(x,y)\to(0,0)$, così pure il secondo rapporto, mentre l'ultimo fattore tende a 0. Si conclude quindi che la funzione data è infinitesima per $(x,y)\to(0,0)$, e si può prolungare per continuità in tale punto definendola ivi uguale a zero.

c) Si è già osservato che la funzione data (prolungata nell'origine col valore 0 in modo che risulti ivi continua) è nulla sugli assi; ne segue subito che le sue derivate parziali prime, calcolate nell'origine, sono nulle:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$$

Pertanto, dalla definizione di funzione differenziabile, occorre calcolare il limite

$$(*)\qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{e^{xy}-1}{[\log(1+|x|)+|\sin y|]\sqrt{x^2+y^2}}$$

e la funzione sarà differenziabile in $(0,0)$ se e solo se tale limite vale zero.

Allo scopo di studiare tale limite, osserviamo che anche in questo caso la funzione è nulla sugli assi, per cui il limite se esiste vale zero. Osserviamo ancora il comportamento della restrizione della funzione ad esempio alla semiretta $y=x,\ x>0$; si ha

$$\lim_{x\to0^+}\frac{e^{x^2}-1}{[\log(1+x)+|\sin x|]\sqrt{2x^2}}=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{x^2}-1}{x^2}\,\frac{x}{\sqrt{2}[\log(1+x)+|\sin x|]}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

Poiché il limite di tale restrizione è diverso da zero, si conclude che il limite $(*)$ non esiste, quindi la funzione non è differenziabile in $(0,0)$. $\square$