

Data la funzione

$$f(x, y) := \frac{(e^{|x+y|} - 1) \log(1 + |y|)}{\arctan(|x| + |y|)}$$

1) determinarne l'insieme di definizione;

2) stabilire se la funzione è prolungabile per continuità in $(0, 0)$;

3) in caso affermativo, stabilire se la funzione così prolungata ammette, in $(0, 0)$, derivate parziali prime;

4) stabilire se la funzione così prolungata è differenziabile in $(0, 0)$.

Svolgimento. 1) Si osservi che $1 + |y| \geq 1$ per ogni $y \in \mathbb{R}$, quindi l'argomento del logaritmo al numeratore è sempre positivo e il logaritmo è sempre definito. Anche l'altro fattore al numeratore è sempre definito.

Per quanto riguarda il denominatore, occorre togliere dall'insieme di definizione gli eventuali punti dove il denominatore si annulla. Ora è noto che l'arcotangente si annulla solo nell'origine, quindi sarà $\arctan(|x| + |y|) = 0$ solo quando $|x| + |y| = 0$ cioè solo quando x e y sono entrambi nulli. Si conclude che la funzione data è definita in $I := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \neq (0, 0)\}$.

2) Per stabilire se la funzione è prolungabile per continuità in $(0, 0)$ occorre verificare se esiste finito il limite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$; la domanda ha senso perché evidentemente $(0, 0)$ è punto di accumulazione per I . Si può intanto osservare che se $y = 0$, cioè sull'asse x , la funzione si annulla; ciò basta ad affermare che, se il limite esiste, esso vale 0.

Studiamo quindi il comportamento della funzione fuori dell'asse x , cioè se $y \neq 0$; si ha in tali punti

$$\begin{aligned} |f(x, y)| &= \left| \frac{(e^{|x+y|} - 1) \log(1 + |y|)}{\arctan(|x| + |y|)} \right| = |e^{|x+y|} - 1| \left| \frac{\log(1 + |y|)}{|y|} \frac{|y|}{\arctan(|x| + |y|)} \right| \leq \\ &\leq |e^{|x+y|} - 1| \left| \frac{\log(1 + |y|)}{|y|} \frac{|y|}{\arctan |y|} \right| \end{aligned}$$

(Per scrivere l'ultima disuguaglianza si è tenuto conto del fatto che la funzione arcotangente è strettamente crescente in $\mathbb{R}$, e che $|x| + |y| \geq |y|$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$).

Si osservi infine che

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |e^{|x+y|} - 1| = 0, \quad \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\log(1 + |y|)}{|y|} = 1, \quad \lim_{y \rightarrow 0} \frac{|y|}{\arctan |y|} = 1$$

quindi dalla disuguaglianza precedente, e da noti teoremi sui limiti, si deduce che

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$$

e la funzione è prolungabile per continuità nell'origine definendola ivi uguale a 0.

3) Verifichiamo ora se la funzione f , prolungata col valore 0 in $(0, 0)$, ammette in tale punto le derivate parziali. Risulta intanto

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$$

essendo la funzione f nulla sull'asse x e quindi sono nulli anche i suoi rapporti incrementali rispetto alla prima variabile. Inoltre si avrebbe

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{(e^{|k|} - 1) \log(1 + |k|)}{k \arctan |k|}$$

Si vede subito tuttavia che tale limite non esiste, perché mentre

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{(e^{|k|} - 1)}{\arctan |k|} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{(e^{|k|} - 1)}{|k|} \frac{|k|}{\arctan |k|} = 1$$

si ha anche

$$\lim_{k \rightarrow 0^+} \frac{\log(1 + |k|)}{k} = 1, \quad \lim_{k \rightarrow 0^-} \frac{\log(1 + |k|)}{k} = -1$$

In altre parole non esiste il limite che definisce la derivata parziale di f rispetto a y (calcolata nell'origine), quindi tale derivata non esiste.

4) Come è noto, condizione necessaria (non sufficiente) affinché una funzione sia differenziabile in un punto, è che in quel punto esistano le derivate parziali prime. Si conclude quindi che la funzione data, prolungata nell'origine col valore 0, non è differenziabile in tale punto.