Esercizio. *Date le funzioni*

$$f(x,y) := \frac{y\arctan(x^2)}{x^4+y^2}, \qquad g(x,y) := f(x,y)\sin\sqrt{|y|}$$

a) stabilire se f è limitata nel suo insieme di definizione;

b) stabilire se la funzione g è prolungabile per continuità in $(0,0)$;

c) in caso affermativo, stabilire se la funzione così prolungata è differenziabile in $(0,0)$.

Svolgimento. a) È noto (ed è facilmente verificabile ad esempio applicando il teorema di Lagrange all'intervallo $[0,x]$) che $|\arctan x| \le |x|\ \forall x \in \mathbb{R}$. Ne segue che

$$(1) \qquad |f(x,y)| \le \frac{x^2|y|}{x^4+y^2} \qquad \forall (x,y) \neq (0,0)$$

Per la (1) si può dire che la funzione f è limitata nel suo insieme di definizione, che è ovviamente

$$I := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ (x,y) \neq (0,0)\}$$

se è limitato in I il secondo membro della (1). Ora come è noto risulta

$$(2) \qquad 2|ab| \le a^2+b^2 \quad \forall a,b \in \mathbb{R}$$

da cui segue immediatamente (ponendo $x^2 = a,\ y = b$) che il secondo membro della (1), e quindi anche $|f|$, non supera $1/2$ in I.

b) La funzione g è il prodotto di una funzione limitata (la f, per il punto a)), e di una funzione infinitesima, cioè $y \to \sin\sqrt{|y|}$. Tale funzione è infinitesima, per $(x,y) \to (0,0)$, poiché è continua (composta di funzioni continue) e $\sin(0) = 0$. Per noti teoremi il prodotto di una funzione limitata per una funzione infinitesima è infinitesimo, quindi risulta

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0$$

e la g è prolungabile per continuità nel punto $(0,0)$ definendola ivi uguale a zero. Il prolungamento sarà dunque la funzione

$$g_1(x,y) = \begin{cases} g(x,y) & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

c) Studiamo infine l'eventuale differenziabilità della funzione g_1. Una condizione necessaria per la differenziabilità è l'esistenza delle derivate parziali nel punto. Poiché la funzione g_1 è nulla sugli assi, si verifica subito che

$$\frac{\partial g_1}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial g_1}{\partial y}(0,0) = 0$$

Occorre ora verificare se la funzione g_1 è differenziabile in $(0,0)$ in base alla definizione. Poiché $\nabla g_1(0,0) = (0,0)$ come abbiamo appena visto, occorre verificare se

$$(3) \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y\arctan(x^2)\sin\sqrt{|y|}}{(x^4+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

Consideriamo la restrizione della funzione alla parabola $y = x^2$ e studiamo il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2\arctan(x^2)}{2x^4}\frac{\sin|x|}{\sqrt{x^2+x^4}}$$

Come si verifica facilmente, tale limite esiste e vale $1/2 \neq 0$; quindi la (3) non vale e la funzione g_1 non è differenziabile in $(0,0)$. □