Sia data la funzione

$$f(x,y) := \begin{cases} \sqrt{\arctan(xy)}\dfrac{\sin(x^2+y^2)}{\log(1+2x^2+y^2)} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) determinarne l'insieme di definizione I;

b) stabilire se la funzione è continua in $(0,0)$;

c) stabilire se la funzione è differenziabile in $(0,0)$.

Svolgimento. a) La funzione è definita in $(0,0)$ (dove vale 0) per definizione. Per quanto riguarda gli altri punti, si osserva che l'espressione $\sqrt{\arctan(xy)}$ è definita solo se il radicando è non negativo. È noto che la funzione $t \to \arctan t$ è strettamente crescente in $\mathbb{R}$ e si annulla in 0. Da ciò segue che risulta $\arctan(xy) \geq 0$ se e solo se $xy \geq 0$; il prodotto xy è non negativo se risulta $x \geq 0, y \geq 0$ oppure $x \leq 0, y \leq 0$. L'insieme di definizione I di f sarà pertanto

$$I = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \geq 0, y \geq 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \leq 0, y \leq 0\}$$

cioè l'unione del primo e terzo quadrante (compresi gli assi).

b) La funzione è continua in $(0,0)$ se risulta

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$$

Si può scrivere, con facili calcoli (se $(x,y) \in I$ con $(x,y) \neq (0,0)$)

$$f(x,y) = f_1(x,y)f_2(x,y)f_3(x,y)f_4(x,y)$$

essendo

$$f_1(x,y) := \sqrt{\arctan(xy)}, \ f_2(x,y) := \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}, \ f_3(x,y) := \frac{2x^2+y^2}{\log(1+2x^2+y^2)}, \ f_4(x,y) := \frac{x^2+y^2}{2x^2+y^2}$$

Si ha poi evidentemente:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_1(x,y) = f_1(0,0) = 0$$

essendo le funzioni $t \to \arctan t$ e $t \to \sqrt{t}$ continue e nulle nell'origine. Si ha pure

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_2(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f_3(x,y) = 1$$

per noti limiti notevoli, ed infine la funzione f_4 è limitata (inferiormente da 0 e superiormente da 1).

Da tutti questi fatti e da noti teoremi è facile concludere che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$$

cioè, come si voleva, che la funzione f è continua in $(0,0)$.

c) La funzione f è evidentemente nulla se $x = 0$ oppure $y = 0$ (cioè sugli assi cartesiani). Da ciò segue subito che esitono e sono nulle le derivate parziali di f, calcolate nell'origine delle coordinate. Segue quindi dalla teoria che la funzione f sarà differenziabile in $(0,0)$ se e solo se risulta

$$(*) \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{\arctan(xy)}\sin(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}\log(1+2x^2+y^2)} = 0$$

Osserviamo che la funzione di cui ora dobbiamo calcolare il limite è ancora nulla sugli assi, ma se consideriamo la restrizione alla retta $y = x$ abbiamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\arctan(x^2)}\,\sin(2x^2)}{\sqrt{2x^2}\,\log(1+3x^2)} = \sqrt{2}/3$$

Da queste considerazioni si conclude che la funzione f non è differenziabile in $(0,0)$ (in quanto il limite $(*)$ non esiste).