Data la funzione

$$f(x,y) := \frac{\arctan(x+y^2)\ln(1+|x+y|)}{|\sin x| + 1 - \cos y}$$

a) determinarne l'insieme di definizione;
b) stabilire se la funzione è prolungabile per continuità nel punto $(0,0)$*;*
c) stabilire se la funzione è prolungabile per continuità nel punto $(\pi,0)$*;*
d) in caso di risposta affermativa alla domanda b), stabilire se la funzione così prolungata è dotata delle derivate parziali in $(0,0)$*;*
e) studiare continuità e differenziabilità della funzione nel punto $(\pi/2,\pi/2)$*.*

Svolgimento. a) Evidentemente il numeratore è sempre definito: infatti l'arcotangente è definita in $\mathbb{R}$ mentre il logaritmo è definito solo in $(0,+\infty)$, ma risulta $1+|x+y| \geq 1 > 0 \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, quindi il numeratore è definito in $\mathbb{R}^2$.

Il denominatore si può annullare, quindi nell'insieme di definizione di f non possono esserci punti in cui il denominatore si annulla. Si osserva che $|\sin x| \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, $1-\cos y \geq 0 \ \forall y \in \mathbb{R}$, pertanto il denominatore si annulla solo negli eventuali punti in cui risulta **contemporaneamente** $\sin x = 0$ e $\cos y = 1$. Tali punti sono del tipo $x = h\pi, \ y = 2k\pi$, con $h,k \in \mathbb{Z}$. Si conclude che la funzione è definita nell'insieme

$$I_f := \mathbb{R}^2 \setminus \cup_{h,k\in\mathbb{Z}} \, (h\pi, 2k\pi)$$

b) In base al punto precedente f non è definita in $(0,0)$, quindi ha senso la domanda se f si può prolungare per continuità in tale punto.
Si osserva che se $x+y=0$ si ha $\log(1+|x+y|)=0$, quindi il numeratore della funzione si annulla sulla retta $y=-x$ (con $x \neq 0$). Da ciò segue che, se esiste il $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, tale limite è necessariamente uguale a zero, perché in ogni intorno (bucato) dell'origine ci sono punti della retta $y=-x$ sulla quale la funzione si annulla.
Allo scopo di verificare se effettivamente si ha

$$(*) \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

proviamo a maggiorare il modulo della funzione f con altre funzioni per cui si possa verificare più facilmente che tendono a zero. Si ha ad esempio:

$$0 \leq |f(x,y)| \leq \frac{|\arctan(x+y^2)|\log(1+|x+y|)}{|\sin x| + 1 - \cos y} \leq$$

$$\leq \frac{(|x|+y^2)\log(1+|x+y|)}{|\sin x| + 1 - \cos y} \leq \left[\frac{|x|}{|\sin x|} + \frac{y^2}{1-\cos y}\right]\log(1+|x+y|)$$

Per scrivere le precedenti disuguaglianze si è tenuto conto del fatto che $|\arctan t| \leq |t| \ \forall t \in \mathbb{R}$ e che $|\sin x| \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}, \ 1-\cos y \geq 0 \ \forall y \in \mathbb{R}$. Si ha poi

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{x}{\sin x}\right| \log(1+|x+y|) = 0$$

in quanto il logaritmo è una funzione continua che nel punto 1 si annulla, mentre $\lim_{x\to 0} |(\sin x)/x| = 1$. Analogamente risulta

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{1-\cos y} |\log(1+|x+y|) = 0$$

ricordando che $\lim_{y\to 0} y^2/(1-\cos y) = 2$. Tenendo conto delle disuguaglianze precedenti la $(*)$ è così provata.

c) Per quanto riguarda il punto $(\pi, 0)$, si osserva che in esso il numeratore di f non si annulla, mentre si annulla il denominatore. Poiché le funzioni che compaiono sia al numeratore sia al denominatore sono tutte continue, ne segue che la funzione non può avere un limite reale per $(x,y) \to (\pi, 0)$; più precisamente risulta

$$\lim_{(x,y)\to(\pi,0)} f(x,y) = +\infty$$

Si conclude che f non è prolungabile per continuità in $(\pi, 0)$.

d) Si è visto nel punto b) che la funzione è prolungabile per continuità in $(0,0)$ definendola ivi uguale a 0; in altre parole la funzione

$$f_1(x,y) := \begin{cases} f(x,y) & \text{se } (x,y) \in I_f \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

è continua. Continuando a chiamare per comodità con la lettera f la funzione prolungata f_1, dobbiamo stabilire se esistono le derivate

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

Allora risulta, in base alla definizione di derivata parziale:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\arctan h \log(1+|h|)}{h|\sin h|} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{\arctan(k^2)\log(1+|k|)}{k(1-\cos k)} =$$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{\arctan(k^2)}{1-\cos k} \times \frac{\log(1+|k|)}{k}$$

Tale limite evidentemente non esiste, perché il primo rapporto tende a 2, mentre il secondo rapporto non ha limite (a causa del modulo, il limite sinistro vale -1 mentre il limite destro vale 1).

Si conclude che $(\partial f)/(\partial x)(0,0)$=1 mentre $(\partial f)/(\partial y)(0,0)$ non esiste.

e) In un intorno del punto $(\pi/2, \pi/2)$ la funzione si può scrivere

$$f(x,y) := \frac{\arctan(x+y^2)\ln(1+x+y)}{\sin x + 1 - \cos y}$$

Le funzioni al numeratore e al denominatore sono di classe C^1 in un intorno del punto $(\pi/2, \pi/2)$, e il denominatore non si annulla. Per noti teoremi una funzione di classe C^1 è differenziabile, quindi è tale anche f nel punto considerato.