Data la funzione

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{y|\sin x| + x|\arctan y|}{\sqrt{e^{x^2} - 1 + \arctan(y^2)}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ k & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) determinare gli eventuali valori di k per i quali la funzione sia continua nel suo insieme di definizione;

b) per i valori di k di cui al punto precedente, stabilire se la funzione ammette le derivate parziali in $(0,0)$;

c) per gli eventuali valori di k di cui al punto precedente, stabilire se la funzione è differenziabile in $(0,0)$;

d) stabilire se la funzione è limitata nel suo insieme di definizione;

e) stabilire se esiste, ed in caso affermativo calcolare, il limite $\lim_{(x,y)\to\infty} f(x,y)$.

Svolgimento. a) f è continua in $(0,0)$ se e solo se risulta

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = k \in \mathbb{R}$$

Allo scopo di vedere se tale limite esiste, cominciamo ad osservare che la funzione è nulla sugli assi cartesiani tranne che nell'origine (cioè se $x = 0$ oppure $y = 0$), quindi il limite considerato, se esiste, vale 0. Proviamo a maggiorare il modulo di f con altre funzioni che siano chiaramente infinitesime per $(x,y) \to (0,0)$. Si ha, se $x \neq 0$ e $y \neq 0$:

$$0 \le |f(x,y)| \le |y| \left| \frac{\sin x}{\sqrt{e^{x^2} - 1}} \right| + |x| \left| \frac{\arctan y}{\sqrt{\arctan(y^2)}} \right|$$

mentre (come facilmente si verifica)

$$\lim_{x\to 0} \frac{|\sin x|}{\sqrt{e^{x^2} - 1}} = 1, \qquad \lim_{y\to 0} \frac{|\arctan y|}{\sqrt{\arctan(y^2)}} = 1$$

Da quanto sopra e da noti teoremi segue facilmente che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$, quindi l'unico valore di k per il quale la funzione è continua in $(0,0)$ è $k = 0$. Nei punti $(x,y) \neq (0,0)$ poi la funzione è banalmente continua perché composta di funzioni continue. (Si osservi anche che il denominatore della funzione si annulla solo nell'origine).

b) Si è già osservato che la funzione f è nulla sugli assi cartesiani, da cui segue

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = 0$$

Si risponde quindi che la funzione f ammette in $(0,0)$ le derivate parziali (uguali a zero).

c) Tenuto conto della risposta precedente, per definizione si ha che f è differenziabile in $(0,0)$ se e solo se risulta

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y|\sin x| + x|\arctan y|}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{e^{x^2}-1+\arctan(y^2)}} = 0$$

La funzione di cui si vuole ora calcolare il limite è, come la f, nulla sugli assi cartesiani, quindi anche per tale funzione si può affermare che se ammette limite per (x, y) che tende a $(0, 0)$, tale limite vale zero. Tuttavia si osserva che ad esempio la restrizione della funzione alla retta $y = x$ non ha limite, infatti si ha

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x|\sin x| + x|\arctan x|}{\sqrt{2x^2}\sqrt{e^{x^2}-1+\arctan(x^2)}} = 1$$
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x|\sin x| + x|\arctan x|}{\sqrt{2x^2}\sqrt{e^{x^2}-1+\arctan(x^2)}} = -1$$

Si conclude che f non è differenziabile in $(0, 0)$.

d) Consideriamo ad esempio la retta $x = 1$ (che ovviamente si estende, per così dire, "fino all'infinito", nel senso che esistono punti di tale retta in ogni intorno di ∞, cioè nei complementari dei cerchi di centro l'origine).

Consideriamo la restrizione della funzione f alla retta $x = 1$; si ha

$$\lim_{y\to+\infty} f(1,y) = \lim_{y\to+\infty} \frac{y|\sin 1| + |\arctan y|}{\sqrt{e-1+\arctan(y^2)}} = +\infty$$

quindi f non è limitata in $\mathbb{R}^2$ (che è il suo insieme di definizione).

e) Si è già osservato che f è nulla sugli assi, mentre (vedi punto precedente) ci sono anche rette sulle quali la funzione non è limitata. Si conclude pertanto che non esiste il limite $\lim_{(x,y)\to\infty} f(x, y)$.