Sia data la funzione

$$f(x,y) := \frac{\arctan(x^2+y^2)}{\sin(x^2+y^2)}$$

a) Determinarne l'insieme di definizione;

b) stabilire se la funzione è prolungabile per continuità in $(0,0)$*;*

c) in caso affermativo, stabilire se la funzione così prolungata ammette derivate parziali in $(0,0)$*;*

d) in caso affermativo, stabilire se la funzione così prolungata è differenziabile in $(0,0)$*;*

e) calcolare, se esiste, $\nabla f(\sqrt{\pi/2}, 0)$.

Svolgimento. a) Il numeratore e il denominatore della funzione data sono definiti in tutto $\mathbb{R}^2$, quindi la funzione f sarà definita in tutto $\mathbb{R}^2$ tranne nei punti in cui si annulla il denominatore. Teniamo anche presente che la funzione $t \to \sin t$ si annulla nei punti del tipo $k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Risulta pertanto (detto I_f l'insieme di definizione di f):

$$I_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sin(x^2+y^2) \neq 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \neq k\pi \ (k \in \mathbb{Z})\} =$$

$$= \mathbb{R}^2 \setminus \cup_{k\in\mathbb{Z}} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = k\pi\}$$

Gli insiemi $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = k\pi\}$ ($k \in \mathbb{Z}$) sono evidentemente vuoti se $k < 0$, mentre se $k > 0$ rappresentano circonferenze di centro l'origine $(0,0)$ e raggio $\sqrt{k\pi}$, e infine la sola origine se $k = 0$.

b) Evidentemente esiste un intorno bucato dell'origine in cui f è definita, quindi ha senso chiedersi se esiste il $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. Se tale limite esiste finito, la funzione sarà prolunabile per continuità nell'origine definendola ivi uguale al suo limite.

Per lo studio del limite suddetto, conviene praticare un semplice cambiamento di variabile in modo da ricondursi ad una funzione di una sola variabile. Poniamo ad esempio

$$t := x^2+y^2, \qquad g(t) := \frac{\arctan t}{\sin t}$$

e studiamo preliminarmente l'eventuale prolungamento per continuità della funzione g nel punto $t = 0$. Risulta banalmente:

$$\lim_{t\to 0} g(t) = \lim_{t\to 0} \frac{\arctan t}{t} \frac{t}{\sin t} = 1$$

per noti limiti notevoli. Pertanto la funzione g è prolungabile per continuità in 0 definendola ivi uguale ad 1, cioè la funzione

$$g_1(t) := \begin{cases} g(t) & \text{se } t \neq 0 \\ 1 & \text{se } t = 0 \end{cases}$$

è continua in un intorno di 0. Da queste considerazioni e da noti teoremi sulla continuità delle funzioni composte, segue che la funzione f, essendo evidentemente

$f(x,y) = g(x^2+y^2)$ in un intorno di $(0,0)$, è prolungabile per continuità in $(0,0)$ e risulta

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1$$

Il prolungamento per continuità di f è

$$f_1(x,y) := \begin{cases} f(x,y) & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

c) In base alla definizione di derivata parziale, si ottiene facilmente:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(0,0) := \lim_{h\to 0} \frac{f_1(h,0) - f_1(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{\arctan(h^2)}{\sin(h^2)} - 1\right) =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\arctan(h^2) - \sin(h^2)}{h\sin(h^2)}$$

Per valutare tale limite la cosa più semplice è ricorrere alla teoria degli ordini di infinitesimo. Con facili calcoli (basati sugli sviluppi di Mac Laurin del seno e dell'arcotangente) si vede che il numeratore, nell'ultimo limite, è infinitesimo di ordine 6 rispetto ad h, mentre il denominatore è infinitesimo di ordine 3. Si conclude pertanto (essendo il numeratore infinitesimo di ordine superiore al denominatore) che il limite vale 0, cioè $(\partial f_1/\partial x)(0,0) = 0$. Inoltre con un calcolo analogo si vede che $(\partial f_1/\partial y)(0,0) = 0$.

d) Per stabilire se la funzione f_1 di cui al punto precedente è differenziabile in $(0,0)$, occorre calcolare il limite

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f_1(h,k) - f_1(0,0) - (\partial f_1/\partial x)(0,0)h - (\partial f_1/\partial y)(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

e se tale limite esiste e vale 0, la funzione è differenziabile in $(0,0)$. Tenendo conto che in $(0,0)$, per quanto visto in precedenza, le derivate parziali prime sono nulle mentre la funzione vale 1, il limite da calcolare si riduce a

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\arctan(h^2+k^2)/\sin(h^2+k^2) - 1}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\arctan(h^2+k^2) - \sin(h^2+k^2)}{\sin(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}}$$

Procedendo in maniera simile a quanto fatto in precedenza, colla sostituzione $t = h^2+k^2$ ci si riconduce al limite

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\arctan t - \sin t}{\sqrt{t}\sin t}$$

nel quale, con facili calcoli, il numeratore è infinitesimo, per $t \to 0^+$, di ordine 3, mentre il denominatore è infinitesimo di ordine $3/2$. Poiché $3 > 3/2$, il limite vale 0 e la funzione f_1 è differenziabile in $(0,0)$.

e) Il punto $(\sqrt{\pi/2}, 0)$ è interno all'insieme di definizione di f, nel quale la funzione è derivabile colle solite regole. Si ha pertanto:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\frac{\dfrac{\sin(x^2+y^2)}{1+(x^2+y^2)^2} - \cos(x^2+y^2)\arctan(x^2+y^2)}{\sin^2(x^2+y^2)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\frac{\dfrac{\sin(x^2+y^2)}{1+(x^2+y^2)^2} - \cos(x^2+y^2)\arctan(x^2+y^2)}{\sin^2(x^2+y^2)}$$

e calcolando tali derivate nel punto $(\sqrt{\pi/2}, 0)$ si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\pi/2,0) = \frac{2\sqrt{\pi/2}}{1+(\pi/2)^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(\pi/2,0) = 0$$

Si conclude che

$$\nabla f(\sqrt{\pi/2}, 0) = \left(\frac{2\sqrt{\pi/2}}{1+(\pi/2)^2}, 0\right)$$