Esercizio. *Si consideri la funzione:*

$$f(x,y) := x^4 + 2x^2y^2 + 2y^4 + x - ky$$

a) Per quali valori del parametro reale k la funzione ha in $(-1/\sqrt[3]{4}, 0)$ un punto critico?
b) Per tali valori si stabilisca se il punto $(-1/\sqrt[3]{4}, 0)$ è un punto di minimo locale o massimo locale o sella.
c) Sia $k = 1$; stabilire se per tale valore di k la funzione f è superiormente limitata e / o inferiormente limitata.
d) Alla luce della risposta alla domanda precedente, stabilire se la funzione (nel caso $k = 1$) ammette almeno un punto di massimo assoluto e / o almeno un punto di minimo assoluto in $\mathbb{R}^2$.
e) Sia ora $k = 0$. Determinare, se esistono, gli estremi globali di f in

$$A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + 2x^2y^2 + 2y^4 - 1 = 0\}$$

Svolgimento. a) Ricordiamo che un punto si dice *critico* per una funzione di due o più variabili, se in tale punto esiste il gradiente e si annulla. Si ha evidentemente:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 + 4xy^2 + 1, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4x^2y + 8y^3 - k$$

La domanda quindi chiede se, per qualche valore del parametro k, tali derivate si annullano nel punto $(-1/\sqrt[3]{4}, 0)$. Un semplice calcolo rivela che ciò accade se e solo se $k = 0$.

b) Per noti teoremi, per rispondere a tale domanda può essere utile studiare la matrice hessiana (o matrice delle derivate seconde) della funzione f. Si ha

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12x^2 + 4y^2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 4x^2 + 24y^2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 8xy$$

e quindi la matrice hessiana H calcolata nel punto $(-1/\sqrt[3]{4}, 0)$ è la seguente:

$$H(-1/\sqrt[3]{4}, 0) = \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Dall'esame di questa matrice hessiana, per noti teoremi si può concludere che il punto critico considerato è un punto di minimo relativo.

c) Si può osservare che la restrizione delle funzione f all'asse x è la seguente:

$$f(x,0) = x^4 + x$$

la quale non è evidentemente superiormente limitata, in quanto $\lim_{x\to+\infty} f(x,0) = +\infty$; da ciò segue che f non è superiormente limitata in $\mathbb{R}^2$.
Cerchiamo di stabilire se f è inferiormente limitata in $\mathbb{R}^2$. A tale scopo può essere conveniente intodurre le coordinate polari $x = \rho\cos\theta,\ y = \rho\sin\theta$. Risulta evidentemente

$$f(x,y) \geq x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + x - y \geq (x^2+y^2)^2 - |x| - |y| = \rho^4 - |\rho\cos\theta| - |\rho\sin\theta| \geq \rho^4 - 2\rho$$

L'ultimo membro della precedente disuguaglianza è una funzione di ρ inferiormente limitata, quindi si può concludere che f è inferiormente limitata in $\mathbb{R}^2$.

d) Poichè f non è superiormente limitata in $\mathbb{R}^2$, evidentemente non esistono punti di massimo assoluto per f. Per quanto riguarda i punti di minimo assoluto, si può intanto osservare che

$$\lim_{\rho \to +\infty} (\rho^4 - 2\rho) = +\infty$$

e quindi, in base all'ultima disuguaglianza del punto precedente, è pure

$$\lim_{(x,y) \to \infty} f(x, y) = +\infty$$

Osserviamo anche che la funzione f è evidentemente continua in $\mathbb{R}^2$, quindi possiamo applicare il teorema di Weiestrass generalizzato, ottenendo l'esistenza di almeno un punto di minimo assoluto per f in $\mathbb{R}^2$.

e) Si è già osservato che la funzione f è continua; osserviamo pure che l'insieme A è limitato in quanto è contenuto (come facilmente si verifica) ad esempio nel quadrato

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$$

L'insieme A è anche chiuso in quanto descritto da disuguaglianze deboli tra funzioni continue. Si può quindi applicare il teorema di Weiestrass alla funzione f e all'insieme A, ottenendo l'esistenza in A di almeno un punto di minimo assoluto e almeno un punto di massimo assoluto per la funzione f.
Per determinare il massimo e il minimo valore di f in A, basta osservare che in A la funzione vale esattamente $x + 1$ (per la definizione di A). Ora il massimo valore di x in A è 1, in quanto in A risulta

$$x^4 = 1 - 2x^2 y^2 - 2y^4 \leq 1$$

e per lo stesso motivo il minimo valore di x in A è -1. Si conclude che il massimo assoluto di f in A vale 2 mentre il minimo assoluto di f in A vale 0.