

STUDIO DI UNA FUNZIONE INTEGRALE

Studiamo la funzione f di una variabile reale, a valori in $\mathbb{R}$, definita da

$$f(x) = \int_{\frac{1}{2}}^x \frac{\ln t}{\ln |t^2 - 2|} dt.$$

1. Il dominio di f .

Denotiamo con g la funzione integranda. Allora $g(t) = \frac{\ln t}{\ln |t^2 - 2|}$. Per definizione, $Dom(f)$ è l'insieme dei numeri reali x tali che l'integrale $\int_{\frac{1}{2}}^x g(t) dt$ esista, eventualmente come integrale improprio, ed assuma valori reali. Osserviamo che

$$\begin{aligned} Dom(g) &= \{t \in (0, +\infty) : t^2 - 2 \neq 0 \text{ e } |t^2 - 2| \neq 1\} = \{t \in (0, +\infty) : t^2 \notin \{1, 2, 3\}\} \\ &= \{t \in (0, +\infty) : t \notin \{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}\} = (0, 1) \cup (1, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty) \end{aligned}$$

e che l'estremo fisso $\frac{1}{2} \in (0, 1)$. Poiché g è continua nel proprio dominio, in quanto rapporto di due funzioni continue (il logaritmo naturale e la funzione composta di un polinomio con il valore assoluto e con il logaritmo naturale), ne segue che $(0, 1) \subseteq Dom(f)$. Si noti anche che, se $x < 0$, l'integrale $\int_{\frac{1}{2}}^x g(t) dt$ non esiste, neanche come integrale improprio, perché l'intervallo di integrazione $[x, \frac{1}{2}]$ contiene un intervallo, con interno non vuoto (ossia non ridotto ad un punto), in cui la funzione g non è definita (e cioè l'intervallo $[x, 0]$); perciò $Dom(f) \subseteq [0, +\infty)$. Si ha dunque che

$$(0, 1) \subseteq Dom(f) \subseteq [0, +\infty).$$

Ricordiamo anche che, essendo f una funzione integrale, $Dom(f)$ è un intervallo.

Stabiliamo innanzitutto se $0 \in Dom(f)$; ciò equivale a stabilire se l'integrale improprio $\int_{\frac{1}{2}}^0 g(t) dt$ converge (o, equivalentemente, se converge l'integrale improprio $\int_0^{\frac{1}{2}} g(t) dt$). Poiché $\lim_{t \rightarrow 0^+} \ln t = -\infty$ e $\lim_{t \rightarrow 0^+} \ln |t^2 - 2| = \ln 2 (> 0)$, ne segue che $\lim_{t \rightarrow 0^+} g(t) = -\infty$; inoltre, $g(t)$ è infinita, per $t \rightarrow 0^+$, dello stesso ordine rispetto a $\ln t$, e quindi di ordine inferiore a β per ogni $\beta \in (0, +\infty)$. In particolare, quindi, $g(t)$ è infinita, per $t \rightarrow 0^+$, di ordine inferiore ad $\frac{1}{2} (< 1)$; ma allora l'integrale improprio $\int_0^{\frac{1}{2}} g(t) dt$ converge, e quindi $0 \in Dom(f)$. Perciò

$$[0, 1) \subseteq Dom(f) \subseteq [0, +\infty).$$

Ora stabiliamo se $1 \in Dom(f)$, e cioè se converge l'integrale improprio $\int_{\frac{1}{2}}^1 g(t) dt$. Calcoliamo (se esiste) $\lim_{t \rightarrow 1^-} g(t)$. Osserviamo che $\lim_{t \rightarrow 1^-} \ln t = 0 = \lim_{t \rightarrow 1^-} \ln |t^2 - 2|$ (forma indeterminata $\frac{0}{0}$). Per ogni $t \in [\frac{1}{2}, 1)$,

$$\begin{aligned} (1.1) \quad g(t) &= \frac{\ln t}{\ln |t^2 - 2|} = \frac{\ln t}{\ln(2 - t^2)} = \frac{\ln t}{\ln[1 + (1 - t^2)]} = \left(\frac{\ln t}{t - 1}\right) \left[\frac{1 - t^2}{\ln(2 - t^2)}\right] \left(\frac{t - 1}{1 - t^2}\right) \\ &= \left(\frac{\ln t}{t - 1}\right) \left[\frac{1 - t^2}{\ln(2 - t^2)}\right] \left(-\frac{1}{t + 1}\right). \end{aligned}$$

Per un noto limite notevole, $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{\ln t}{t - 1} = 1$. Inoltre, poiché $\lim_{t \rightarrow 1} (2 - t^2) = 1$, dallo stesso limite notevole otteniamo che

$$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{1 - t^2}{\ln(2 - t^2)} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(2 - t^2) - 1}{\ln(2 - t^2)} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{1}{\left[\frac{\ln(2 - t^2)}{(2 - t^2) - 1}\right]} = 1.$$

Perciò $\lim_{t \rightarrow 1^-} g(t) = -\frac{1}{2}$, e quindi l'integrale improprio $\int_{\frac{1}{2}}^1 g(t) dt$ converge; allora $1 \in Dom(f)$. Quindi

$$[0, 1] \subseteq Dom(f) \subseteq [0, +\infty).$$

Ora stabiliamo se $Dom(f)$ contiene punti a destra di 1. Essendo g continua in $(1, \sqrt{2})$, è verificata una delle due seguenti condizioni:

- i) l'integrale improprio $\int_1^x g(t) dt$ converge per ogni $x \in (1, \sqrt{2})$;
- ii) l'integrale improprio $\int_1^x g(t) dt$ non converge per nessun valore di x in $(1, \sqrt{2})$.

Se è verificata la i), allora $Dom(f) \supseteq (1, \sqrt{2})$; se invece è verificata la ii), allora $Dom(f)$ non contiene nessun punto di $(1, \sqrt{2})$, e quindi, essendo un intervallo, non contiene punti in $(1, +\infty)$.

Per capire quale sia verificata tra la i) e la ii), calcoliamo (se esiste) $\lim_{t \rightarrow 1^+} g(t)$. Scomponendo $g(t)$ (con $t \in (1, \sqrt{2})$) come in (1.1), ed utilizzando lo stesso limite notevole, otteniamo che anche $\lim_{t \rightarrow 1^+} g(t) = -\frac{1}{2}$; allora l'integrale improprio $\int_1^x g(t) dt$ converge $\forall x \in (1, \sqrt{2})$, e cioè vale la i). Perciò $Dom(f) \supseteq (1, \sqrt{2})$, e quindi

$$[0, \sqrt{2}) \subseteq Dom(f) \subseteq [0, +\infty).$$

Ora stabiliamo se $\sqrt{2} \in Dom(f)$, e cioè se converge l'integrale improprio $\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}} g(t) dt$.

Calcoliamo (se esiste) $\lim_{t \rightarrow \sqrt{2}^-} g(t)$. Poiché $\lim_{t \rightarrow \sqrt{2}^-} \ln t = \frac{1}{2} \ln 2$ e $\lim_{t \rightarrow \sqrt{2}^-} \ln |t^2 - 2| = -\infty$, ne segue che $\lim_{t \rightarrow \sqrt{2}^-} g(t) = 0$; perciò l'integrale improprio $\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}} g(t) dt$ converge, e quindi $\sqrt{2} \in Dom(f)$. Dunque

$$[0, \sqrt{2}] \subseteq Dom(f) \subseteq [0, +\infty).$$

Ora stabiliamo se $Dom(f)$ contiene punti a destra di $\sqrt{2}$. Essendo g continua in $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$, è verificata una delle due seguenti condizioni:

- I) l'integrale improprio $\int_{\sqrt{2}}^x g(t) dt$ converge per ogni $x \in (\sqrt{2}, \sqrt{3})$;
- II) l'integrale improprio $\int_{\sqrt{2}}^x g(t) dt$ non converge per nessun valore di x in $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

Se è verificata la I), allora $Dom(f) \supseteq (\sqrt{2}, \sqrt{3})$; se invece è verificata la II), allora $Dom(f)$ non contiene nessun punto di $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$, e quindi, essendo un intervallo, non contiene punti in $(\sqrt{2}, +\infty)$.

È immediato osservare che anche $\lim_{t \rightarrow \sqrt{2}^+} g(t) = 0$; ma allora l'integrale improprio $\int_{\sqrt{2}}^x g(t) dt$ converge $\forall x \in (\sqrt{2}, \sqrt{3})$, e cioè vale la I). Si ha dunque che $Dom(f) \supseteq (\sqrt{2}, \sqrt{3})$, e di conseguenza

$$[0, \sqrt{3}) \subseteq Dom(f) \subseteq [0, +\infty).$$

Ora stabiliamo se $\sqrt{3} \in Dom(f)$, e cioè se converge l'integrale improprio $\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{3}} g(t) dt$.

Calcoliamo (se esiste) $\lim_{t \rightarrow \sqrt{3}^-} g(t)$. Poiché $\lim_{t \rightarrow \sqrt{3}^-} \ln t = \frac{1}{2} \ln 3 (> 0)$ e

$$\ln |t^2 - 2| = \ln(t^2 - 2) \xrightarrow[t \rightarrow \sqrt{3}^-]{} 0^-,$$

ne segue che $\lim_{t \rightarrow \sqrt{3}^-} g(t) = -\infty$; allora determiniamo (se esiste) l'ordine di infinito di g per $t \rightarrow \sqrt{3}^-$. Dal limite notevole (già utilizzato in precedenza) $\lim_{y \rightarrow 1} \frac{\ln y}{y-1} = 1$ otteniamo che

$$1 = \lim_{t \rightarrow \sqrt{3}^-} \frac{\ln(t^2 - 2)}{(t^2 - 2) - 1} = \lim_{t \rightarrow \sqrt{3}^-} \frac{\ln(t^2 - 2)}{t^2 - 3} = \lim_{t \rightarrow \sqrt{3}^-} \frac{\ln(t^2 - 2)}{(t - \sqrt{3})(t + \sqrt{3})}.$$

Poiché $\lim_{t \rightarrow \sqrt{3}^-} (t + \sqrt{3}) = 2\sqrt{3} (\in \mathbb{R} \setminus \{0\})$, ne segue che $\ln |t^2 - 2|$ è infinitesima di ordine 1 per $t \rightarrow \sqrt{3}^-$, e di

conseguenza g è infinita di ordine 1 per $t \rightarrow \sqrt{3}^-$. Ma allora l'integrale improprio $\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{3}} g(t) dt$ non converge. Più precisamente, si ha che

$$(1.2) \quad \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}^-} \int_{\frac{1}{2}}^x g(t) dt = -\infty.$$

Perciò $\sqrt{3} \notin \text{Dom}(f)$; essendo $\text{Dom}(f)$ un intervallo, ne segue che $\text{Dom}(f)$ non contiene punti a destra di $\sqrt{3}$. Ma allora

$$\text{Dom}(f) = [0, \sqrt{3}).$$

2. Continuità.

Essendo una funzione integrale, f è continua nel suo dominio, e quindi in $[0, \sqrt{3})$.

3. Limiti negli estremi del dominio che non appartengono a $\text{Dom}(f)$.

Da (1.2) otteniamo che $\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}^-} f(x) = -\infty$.

4. Derivabilità.

Dato che g è continua nel proprio dominio, ne segue che f è derivabile in $\text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) = (0, 1) \cup (1, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \sqrt{3})$; inoltre,

$$f'(x) = g(x) = \frac{\ln x}{\ln|x^2 - 2|} \quad \forall x \in (0, 1) \cup (1, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \sqrt{3}).$$

In realtà la funzione g è di classe C^∞ nel proprio dominio, in quanto rapporto di due funzioni di classe C^∞ , e quindi f' è di classe C^∞ in $(0, 1) \cup (1, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \sqrt{3})$; ma allora anche f è di classe C^∞ in $(0, 1) \cup (1, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

Ora studiamo la derivabilità di f nei rimanenti punti di $\text{Dom}(f)$, e cioè in 0, 1 e $\sqrt{2}$. In ciascuno di questi tre punti, la funzione f è continua (cf. punto 2). Poiché $g = f'$, per quanto provato al punto 1 si ha inoltre che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1} f'(x) = -\frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} f'(x) = 0.$$

Da un noto corollario del teorema di Lagrange segue allora che f non è derivabile in 0, mentre è derivabile sia in 1 che in $\sqrt{2}$; inoltre, $f'(1) = -\frac{1}{2}$ e $f'(\sqrt{2}) = 0$.

Quindi, ricapitolando: f è derivabile in $(0, \sqrt{3})$ (anzi, f è di classe C^1 in $(0, \sqrt{3})$), visto che f' è continua anche in 1 e in $\sqrt{2}$ e non è derivabile in 0; inoltre,

$$(4.1) \quad f'(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{\ln(2-x^2)} & \text{se } x \in (0, 1) \cup (1, \sqrt{2}) \\ -\frac{1}{2} & \text{se } x = 1 \\ 0 & \text{se } x = \sqrt{2} \\ \frac{\ln x}{\ln(x^2-2)} & \text{se } x \in (\sqrt{2}, \sqrt{3}). \end{cases}$$

5. Monotonia ed estremi relativi e assoluti.

Osserviamo che:

- $x \in (0, 1) \implies x^2 < 1 \implies 2 - x^2 > 1 \implies \ln(2 - x^2) > 0 \implies \frac{\ln x}{\ln(2-x^2)} < 0$ (dato che $\ln x < 0$);
- $x \in (1, \sqrt{2}) \implies x^2 > 1 \implies 2 - x^2 < 1 \implies \ln(2 - x^2) < 0 \implies \frac{\ln x}{\ln(2-x^2)} < 0$ (dato che $\ln x > 0$);
- $x \in (\sqrt{2}, \sqrt{3}) \implies x^2 < 3 \implies x^2 - 2 < 1 \implies \ln(x^2 - 2) < 0 \implies \frac{\ln x}{\ln(x^2-2)} < 0$ (dato che $\ln x > 0$).

Da (4.1) segue allora che $f'(x) < 0 \forall x \in (0, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \sqrt{3})$. Perciò f è strettamente decrescente in $[0, \sqrt{3})$. Di conseguenza, f ammette massimo assoluto e l'unico punto di massimo assoluto è 0; non esistono altri punti di estremo relativo. In particolare, f non ammette minimo assoluto.

6. Zeri e segno di f .

È immediato osservare che $f(\frac{1}{2}) = 0$. Essendo f strettamente decrescente, $\frac{1}{2}$ è anche l'unico zero di f ; inoltre,

$$\begin{cases} f(x) > 0 & \forall x \in [0, \frac{1}{2}) \\ f(x) < 0 & \forall x \in (\frac{1}{2}, \sqrt{3}). \end{cases}$$

7. Derivabilità fino all'ordine 2.

Come già osservato al punto 4, f è di classe C^∞ , e cioè ammette derivate di ogni ordine, in $(0, 1) \cup (1, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \sqrt{3})$. Da (4.1) si ricava che

$$(7.1) \quad f''(x) = \begin{cases} \frac{\frac{\ln(2-x^2)}{x} + \frac{2x \ln x}{2-x^2}}{[\ln(2-x^2)]^2} = \frac{1}{x \ln(2-x^2)} + \frac{2x \ln x}{(2-x^2)[\ln(2-x^2)]^2} & \text{se } x \in (0, 1) \cup (1, \sqrt{2}) \\ \frac{\frac{\ln(x^2-2)}{x} - \frac{2x \ln x}{x^2-2}}{[\ln(x^2-2)]^2} = \frac{1}{x \ln(x^2-2)} - \frac{2x \ln x}{(x^2-2)[\ln(x^2-2)]^2} & \text{se } x \in (\sqrt{2}, \sqrt{3}). \end{cases}$$

Ovviamente, in 0 la funzione f non ammette derivata seconda, visto che non ammette neanche la derivata prima; studiamo allora l'esistenza della derivata seconda in 1 ed in $\sqrt{2}$. In ciascuno dei due punti f' è continua (cf. punto 4), e quindi può essere utile studiare il limite di f'' (per applicare il corollario del teorema di Lagrange che abbiamo già utilizzato al punto 4).

Calcoliamo (se esiste) $\lim_{x \rightarrow 1} f''(x)$.

Per ogni $x \in (0, 1) \cup (1, \sqrt{2})$, si ha che

$$f''(x) = \frac{(2-x^2) \ln(2-x^2) + 2x^2 \ln x}{x(2-x^2)[\ln(2-x^2)]^2}$$

(forma indeterminata $\frac{0}{0}$ per $x \rightarrow 1$). Poiché $\lim_{x \rightarrow 1} x(2-x^2) = 1$, ne segue che

$$(7.2) \quad \lim_{x \rightarrow 1} f''(x) \exists \iff \exists \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2-x^2) \ln(2-x^2) + 2x^2 \ln x}{[\ln(2-x^2)]^2}; \text{ inoltre, in tal caso, i due limiti coincidono.}$$

Vediamo se la regola di De L'Hôpital è applicabile alla forma indeterminata $\frac{(2-x^2) \ln(2-x^2) + 2x^2 \ln x}{[\ln(2-x^2)]^2}$ (del tipo $\frac{0}{0}$, per $x \rightarrow 1$). Siano rispettivamente N , $D : (0, \sqrt{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ il numeratore ed il denominatore di quest'ultima frazione. Allora

$$N(x) = (2-x^2) \ln(2-x^2) + 2x^2 \ln x, \quad D(x) = [\ln(2-x^2)]^2 \quad \forall x \in (0, \sqrt{2}).$$

Osserviamo che N e D sono entrambe infinitesime per $x \rightarrow 1$ e derivabili in $(0, \sqrt{2})$; inoltre, per ogni $x \in (0, \sqrt{2})$ si ha che

$$\begin{aligned} N'(x) &= -2x \ln(2-x^2) + (2-x^2) \left(\frac{-2x}{2-x^2} \right) + 4x \ln x + 2x^2 \left(\frac{1}{x} \right) \\ &= -2x \ln(2-x^2) - 2x + 4x \ln x + 2x = -2x \ln(2-x^2) + 4x \ln x \end{aligned}$$

e

$$D'(x) = 2 \ln(2-x^2) \left(\frac{-2x}{2-x^2} \right) = -\frac{4x \ln(2-x^2)}{2-x^2} \quad (\neq 0 \text{ se } x \neq 1).$$

Pertanto

$$\frac{N'(x)}{D'(x)} = (2-x^2) \left(\frac{-2x \ln(2-x^2) + 4x \ln x}{-4x \ln(2-x^2)} \right) = (2-x^2) \left(\frac{1}{2} - \frac{\ln x}{\ln(2-x^2)} \right) \quad \forall x \in (0, 1) \cup (1, \sqrt{2}).$$

Essendo $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{\ln(2-x^2)} = -\frac{1}{2}$ (cf. punto 1), ne segue che $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{N'(x)}{D'(x)} = 1$ e quindi, per la regola di De L'Hôpital, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2-x^2) \ln(2-x^2) + 2x^2 \ln x}{[\ln(2-x^2)]^2} = 1$. Da (7.2) otteniamo che allora anche $\lim_{x \rightarrow 1} f''(x) = 1$. Perciò, per il corollario di cui sopra del teorema di Lagrange, f ammette derivata seconda in 1 e $f''(1) = 1$.

Ora calcoliamo (se esiste) $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^-} f''(x)$.

Osserviamo che $2-x^2 \xrightarrow{x \rightarrow \sqrt{2}^-} 0^+$ e quindi $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^-} \ln(2-x^2) = -\infty$; di conseguenza, $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^-} \frac{1}{x \ln(2-x^2)} = 0$.

Dal limite notevole $\lim_{t \rightarrow 0^+} t^\alpha \ln t = 0$ (per $\alpha > 0$) segue inoltre che

$$(2-x^2)[\ln(2-x^2)]^2 = \left[(2-x^2)^{\frac{1}{2}} \ln(2-x^2) \right]^2 \xrightarrow{x \rightarrow \sqrt{2}^-} 0^+$$

e quindi, dato che $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^-} 2x \ln x = \sqrt{2} \ln 2 (> 0)$, $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^-} \frac{2x \ln x}{(2-x^2)[\ln(2-x^2)]^2} = +\infty$. Da (7.1) otteniamo dunque che $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^-} f''(x) = +\infty$. Dal corollario del teorema di Lagrange segue allora che f' non ammette derivata destra in $\sqrt{2}$; perciò f' non è derivabile in $\sqrt{2}$, e cioè f non ammette derivata seconda in $\sqrt{2}$.

Quindi, ricapitolando: f ammette derivata seconda in $(0, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \sqrt{3})$ (anzi, f è di classe C^2 in $(0, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \sqrt{3})$, visto che f'' è continua anche in 1) e non ammette derivata seconda né in 0 (punto in cui non è neanche derivabile) né in $\sqrt{2}$; inoltre,

$$(7.3) \quad f''(x) = \begin{cases} \frac{(2-x^2)\ln(2-x^2) + 2x^2 \ln x}{x(2-x^2)[\ln(2-x^2)]^2} & \text{se } x \in (0, 1) \cup (1, \sqrt{2}) \\ 1 & \text{se } x = 1 \\ \frac{(x^2-2)\ln(x^2-2) - 2x^2 \ln x}{x(x^2-2)[\ln(x^2-2)]^2} & \text{se } x \in (\sqrt{2}, \sqrt{3}). \end{cases}$$

8. Convessità, concavità e flessi.

Studiamo il segno di f'' in $(0, \sqrt{2})$.

Da (7.3) segue che $f''(x) = \frac{N(x)}{x(2-x^2)[\ln(2-x^2)]^2}$ per ogni $x \in (0, 1) \cup (1, \sqrt{2})$, dove $N : (0, \sqrt{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ è la funzione definita al punto 7. Poiché $x(2-x^2)[\ln(2-x^2)]^2 > 0 \forall x \in (0, 1) \cup (1, \sqrt{2})$, se $x \in (0, 1) \cup (1, \sqrt{2})$ il segno di $f''(x)$ coincide con quello di $N(x)$. Come osservato al punto 7, N è derivabile in $(0, \sqrt{2})$ e $N'(x) = -2x \ln(2-x^2) + 4x \ln x \forall x \in (0, \sqrt{2})$. Allora $N'(0) = 0$; inoltre:

$$\begin{aligned} \cdot x \in (0, 1) &\implies \begin{cases} \ln x < 0 \\ \ln(2-x^2) > 0 \end{cases} \implies N'(x) < 0; \\ \cdot x \in (1, \sqrt{2}) &\implies \begin{cases} \ln x > 0 \\ \ln(2-x^2) < 0 \end{cases} \implies N'(x) > 0. \end{aligned}$$

Perciò N è strettamente decrescente in $(0, 1]$ e strettamente crescente in $[1, \sqrt{2})$, e quindi ha un unico punto di minimo assoluto in 1; poiché $N(1) = 0$, ne segue che $N(x) > 0 \forall x \in (0, 1) \cup (1, \sqrt{2})$, e quindi $f''(x) > 0 \forall x \in (0, 1) \cup (1, \sqrt{2})$. Essendo $f''(1) = 1$, si ha allora che $f''(x) > 0 \forall x \in (0, \sqrt{2})$; pertanto f è convessa in $(0, \sqrt{2})$.

Ora studiamo il segno di f'' in $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

Poiché, $\forall x \in (\sqrt{2}, \sqrt{3})$, si ha che $x^2 - 2 > 0$ e quindi $x(x^2-2)[\ln(x^2-2)]^2 > 0$, da (7.3) segue che, se $x \in (\sqrt{2}, \sqrt{3})$, il segno di $f''(x)$ coincide con quello di $(x^2-2)\ln(x^2-2) - 2x^2 \ln x$. Osserviamo che

$$x \in (\sqrt{2}, \sqrt{3}) \implies \begin{cases} x^2 - 2 \in (0, 1) \\ \ln(x^2 - 2) < 0 \\ \ln x > 0 \end{cases} \implies (x^2 - 2)\ln(x^2 - 2) - 2x^2 \ln x < 0.$$

Pertanto $f''(x) < 0 \forall x \in (\sqrt{2}, \sqrt{3})$, e quindi f è concava in $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

Infine, dato che f è derivabile in $(0, \sqrt{3})$, convessa in $(0, \sqrt{2})$ e concava in $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$, si ha che $\sqrt{2}$ è un punto di flesso discendente per f .

9. Asintoti.

Dal punto 3 segue che la retta di equazione $x = \sqrt{3}$ è un asintoto verticale (sinistro) per f . Dato che $Dom(f)$ è limitato, ovviamente non possono esservi né asintoti orizzontali né asintoti obliqui.

Il grafico di f

