Sia data la funzione

$$f(x) := \arctan(x)e^{\arctan(x)}$$

a) Determinare l'insieme di definizione I di f;

b) calcolare gli eventuali limiti di f agli estremi di I;

c) stabilire se f è limitata in I;

d) studiare gli eventuali intervalli in cui f è crescente o decrescente;

e) stabilire se f ammette in I punti di massimo o minimo, relativo o assoluto;

f) stabilire se per il grafico di f esistono asintoti.

Svolgimento. a) f è composta di funzioni definite in tutto $\mathbb{R}$ (arcotangente, esponenziale), quindi è definita in tutto $\mathbb{R}$, cioè $I = \mathbb{R}$.

b) Come è noto, $\lim_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\pi/2$, $\lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = +\pi/2$, e la funzione esponenziale è una funzione continua. Ne segue subito

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -(\pi/2)e^{-\pi/2}, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = (\pi/2)e^{\pi/2}$$

c) Come si è visto, f ha la proprietà di essere definita e continua in $\mathbb{R}$, ed ha limiti reali a $-\infty$ e $+\infty$. Una funzione siffatta è limitata in $\mathbb{R}$: infatti per definizione di limite per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che si ha

$$|f(x) + \pi/2| < \epsilon \text{ se } x < -\delta, \quad |f(x) - \pi/2| < \epsilon \text{ se } x > \delta$$

mentre f è certamente limitata nell'intervallo $[-\delta, \delta]$ per il teorema di Weierstrass. Da queste considerazioni è facile concludere che f è limitata in tutto $\mathbb{R}$.

d) Si verifica facilmente che la funzione f è derivabile in $\mathbb{R}$ (anzi, in realtà $f \in C^\infty(\mathbb{R})$); per noti teoremi f sarà strettamente crescente negli (eventuali) intervalli in cui $f'(x) > 0$ mentre sarà strettamente decrescente negli (eventuali) intervalli in cui $f'(x) < 0$. Con un facile calcolo si ha

$$f'(x) = \frac{1 + \arctan(x)}{1 + x^2} \cdot e^{\arctan(x)}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

dalla quale si vede che il segno di tale derivata dipende solo dal segno del numeratore $1 + \arctan(x)$. L'arcotangente è una funzione strettamente crescente in $\mathbb{R}$, e si ha $\arctan(\tan(-1)) = -1$. Da tali considerazioni si deduce che è

$$f'(x) < 0 \quad \text{se } x < \tan(-1), \qquad f'(x) > 0 \quad \text{se } x > \tan(-1)$$

da cui segue che f è strettamente decrescente in $(-\infty, \tan(-1))$, e strettamente crescente in $(\tan(-1), +\infty)$.

e) Dalla risposta precedente risulta che il punto $\tan(-1)$ è (l'unico) punto di minimo assoluto per f, mentre non esistono punti di massimo relativo o assoluto.

f) Dai calcoli precedenti segue subito che il grafico di f ammette due asintoti orizzontali: sono le rette $y = -(\pi/2)e^{-\pi/2}$ (per $x \to -\infty$) e $y = (\pi/2)e^{\pi/2}$ (per $x \to +\infty$). $\square$